Équation différentielle du premier ordre

1. Définition

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction inconnue (y(t) par exemple) et ses dérivées ($\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} \ldots$¿.

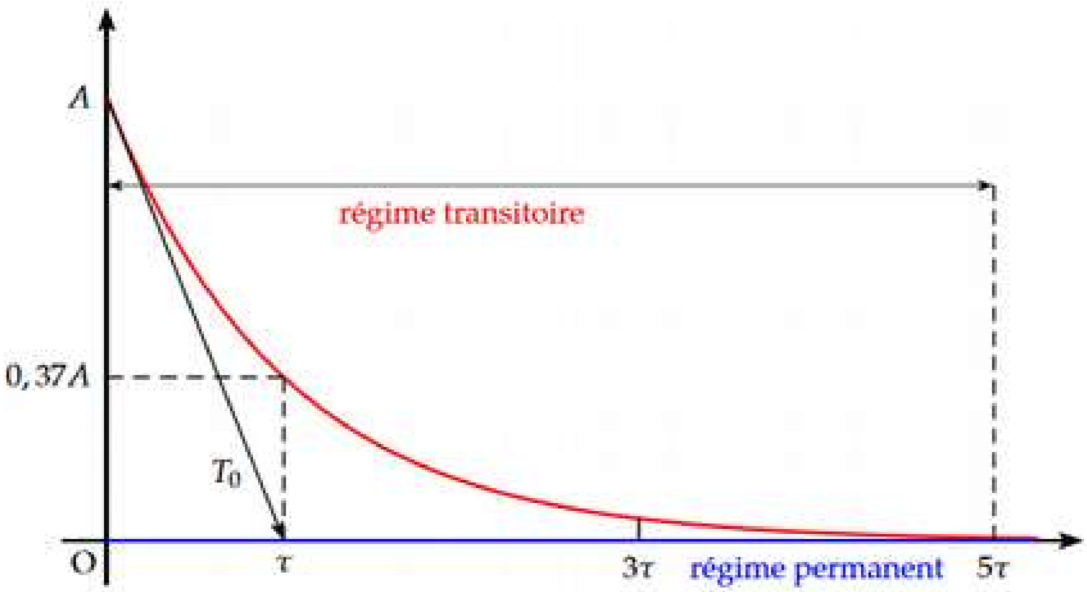
Dans le programme de spécialité de terminale, on se limite aux équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre qui peuvent s'écrire sous la forme : $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\tau}\times y=0$ ou avec second membre constant qui s'écrira $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\tau}\times y=\frac{A}{\tau}$ avec τ, un temps caractéristique et A une constante.

Remarque : *τ correspond au temps caractéristique du phénomène temporel étudié (cinétique chimique, décroissance radioactive, décharge d'un condensateur, loi de refroidissement de Newton …).*

2. Solutions de l'équation différentielle du 1er ordre sans second membre constant

Les solutions sont de la forme $y(t)=C\times e^{\frac{-t}{\square}}$ où C est une constante que l'on déterminera avec les conditions initiales.

- → Exemple : à t = 0, y(0) = A, on obtient $y(t)=A\times e^{\frac{-t}{\square}}$,
- → **Interprétation graphique** :



T_0 représente la tangente à la courbe en 0.
Elle coupe l'asymptote du régime permanent (ici l'axe des abscisses) au point d'abscisse τ.
On peut retenir :

τ	3 τ	5τ
37 %	5 %	1 %

Exemples : décroissance radioactive, décharge d'un condensateur.

3. Résolution de l'équation sans second membre

Démonstration (rappel pour le professeur)

$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\tau}\times y(t)=0$ peut s'écrire sous la forme $\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{\tau}\times y(t)$

Soit $\frac{dy}{y}=\frac{-1}{\tau}\times dt$; on recherche les primitives : $\int \frac{1}{y}.dy=\int \frac{-1}{\tau}\times dt$

ln y + C_1 = $\frac{-1}{\tau}\times$ t + C_2 (avec C_1 et C_2 des constantes).

On peut regrouper les constantes $C_1 + C_2 = C_3$,

ln y = $\frac{-1}{\tau}\times$ t + C_3 (avec C_3 constante).

c-à-d y(t) = $e^{\left(\frac{-1}{\tau}\times t+C3\right)}$ or $e^{(a+b)}=e^a\times e^b$

d'où y(t) = $e^{\left(\frac{-1}{\tau}\times t+C3\right)}$ = $e^{\left(\frac{-1}{\tau}\times t\right)}\times e^{(C3)}$, appelons C la constante telle que C = $e^{(C3)}$

On obtient donc $y(t)=C\times e^{\frac{-t}{\square}}$.

4. Solutions de l'équation différentielle du 1er ordre avec second membre constant

Pour trouver la solution y(t) de l'équation $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\tau}\times y=\frac{A}{\tau}$, il faut procéder en deux étapes :

→ **On résout l'équation sans seconde membre** (voir 2.)

Les solutions sont de la forme $y(t)=C\times e^{\frac{-t}{\square}}$ où C est une constante que l'on déterminera avec les conditions initiales.

→ **On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre**.

Une solution particulière évidente est y(t) = A où A est une constante. Ceci correspond en pratique au régime permanent (y(t) ne varie plus avec le temps).

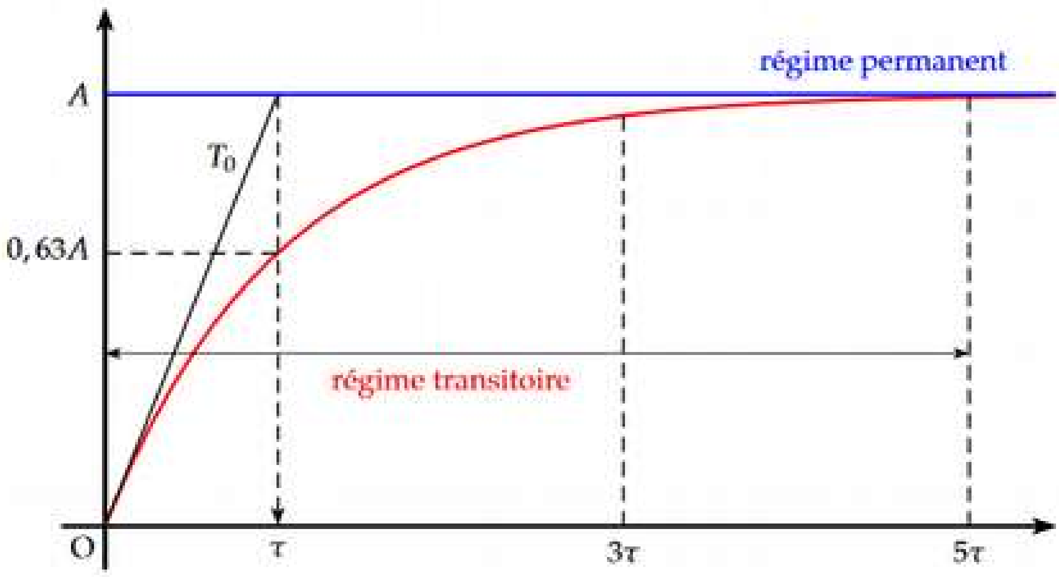
→ **La solution générale** de l'équation différentielle est la somme des deux solutions :

$y(t)=C\times e^{\frac{-t}{\square}}+A$

On détermine C en utilisant les conditions initiales y(t=0) = C + A

Si y(t=0) = 0 (cas fréquent), C = -A on obtient la solution $y(t)=A(1-e^{\frac{-t}{\square}})$.

- ➔ Exemple : à t = 0, y(0) = 0 et $y(t)=A\times\left(1-e^{\frac{-t}{\square}}\right)$
- ➔ **<u>Interprétation graphique</u>**



T_0 représente la tangente à la courbe en 0.
Elle coupe l'asymptote du régime permanent au point d'abscisse τ.
On peut retenir :

τ	3 τ	5τ
63 %	95 %	99 %

Exemples : cinétique d'ordre 1, charge d'un condensateur…

Bibliographie :

Les graphes sont issus du site :
https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math_pour_aller_plus_loin/en_route_vers_superieur/09_equations_differentielles_physique.pdf