Quelques réflexions sur les nombres décimaux

Stéphane Frigot, professeur au lycée Guist'hau, Nantes
Septembre 2014

I. Définition d'un nombre décimal au collège

a) Le document ressource de Décembre 2006 « Les nombres au collège » indique clairement le contexte dans lequel ces nombres doivent être utilisés en $6^{\text{ème}}$ sachant que ces nombres ont déjà été rencontrés à l'école primaire.

> L'apprentissage des mathématiques au cours de la scolarité obligatoire est largement marqué par celui de différents types de nombres et des calculs sur ces nombres. L'appropriation de chaque catégorie de nombres est également marquée par la compréhension de propriétés qui permettent de les caractériser et qui peuvent être en continuité ou en rupture avec celles des nombres déjà connus.
> A chaque étape, l'enseignement des nombres doit donc prendre en compte différents pôles pour leur étude :
> - Dans quelles situations les nombres considérés peuvent-ils être utilisés, pour exprimer des mesures, pour se repérer sur une droite, dans le plan ou sur une sphère ou encore pour résoudre des problèmes portant notamment sur des grandeurs ?
> - Quelles techniques doivent être développées pour l'usage de ces nombres (comparaison, calcul...) ?
> - Quelles propriétés doivent être mises en évidence pour pouvoir justifier ces techniques ?
> - Quels éléments langagiers (verbaux ou symboliques) doivent être maîtrisés pour exprimer les nombres, leurs propriétés et gérer les techniques.

> **Leur usage et leur intérêt** résident d'une part dans la possibilité nouvelle qu'ils offrent pour exprimer la mesure des grandeurs, d'autre part de repérer davantage de points de la demi-droite graduée. Le mathématicien sait que seuls les nombres réels permettent de résoudre complètement ces problèmes. Mais cela nécessite une théorisation poussée que beaucoup d'élèves ont du mal à envisager. Il est cependant possible et nécessaire de faire prendre conscience aux élèves que les nombres décimaux ne permettent souvent que d'apporter une réponse approchée aux problèmes posés.

Hélas, ce document ne dit rien sur la définition d'un nombre décimal.

b) Comment formaliser la notion de nombre décimal pour le professeur, en donner une définition ?

● Voici ce qui est communément dit dans les classes

« Un nombre décimal est un nombre qui a un nombre fini de chiffres après la virgule ».
En tant que *définition*, elle comporte un « *si et seulement si* » implicite. Une définition *caractérise* l'objet qu'elle définit.

Conséquence : si un nombre a une infinité de chiffres après la virgule, alors il n'est pas décimal…
C'est FAUX puisque 0, 999999999… = 1. (il existe de nombreuses démonstrations de cette égalité, comme par exemple : en appelant x le nombre 0,999999999 : $10x = 9 + x$ d'où le résultat).
En revanche la condition est suffisante : « *si un nombre s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, alors il est décimal* ». Mais cela ne caractérise pas les nombres décimaux.

A RETENIR : un nombre possédant une écriture décimale illimitée peut être un nombre décimal.

● D'où vient cette confusion relativement commune?

Beaucoup d'enseignants établissent une correspondance entre **le nombre décimal** et **son développement décimal**, c'est-à-dire une **écriture de ce nombre**, en pensant que cette correspondance est bijective, ce qui n'est pas le cas.

● Un problème à résoudre

Mais alors comment justifier que 1/3 n'est pas décimal puisque dire que « la division décimale ne s'arrête pas » ne suffira plus désormais…

● Notion de développement décimal d'un réel

Proposition : Tout réel est limite d'une suite de décimaux convergente. $\left(\textit{Par exemple } 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}. \right)$

On dit alors que tout nombre réel admet un développement décimal. L'existence est assurée mais pas l'unicité… En fait, il est vrai que tout nombre décimal va admettre un unique développement décimal limité, mais il admet en plus un développement décimal illimité.

Bien entendu, il serait bien incongru d'évoquer ces points en classe de $6^{\text{ème}}$… d'où la question suivante :

● Comment contourner cette difficulté pour donner une vision rigoureuse d'un nombre décimal en $6^{\text{ème}}$?

$1^{\text{ère}}$ méthode possible :

Caractérisation 1 :

« Un nombre est décimal si et seulement si il admet un développement décimal limité, c'est-à-dire si et seulement si il POSSEDE UNE écriture avec un nombre fini de chiffres après la virgule. »

Le nombre décimal est alors associé à son écriture décimale, ce qui n'est pas totalement satisfaisant car si cette caractérisation est rigoureuse, les élèves de $6^{\text{ème}}$ vont souvent la remplacer par la « définition » fausse mentionnée en début de paragraphe.

$2^{\text{ème}}$ méthode possible :

Elle est en lien avec le fait de tenter de compléter la demi-droite graduée (qui n'est donc pas encore une demi-droite… il faudra attendre la $3^{\text{ème}}$) idée présente dans le document d'accompagnement de 2006.

Puisque les décimaux vont permettre d'approcher plus finement des grandeurs, on va subdiviser une unité en 10 segments d'1/10 d'unité chacun puis ainsi de suite. On ajoute des points à la demi-droite graduée, et même une infinité.
$\mathbb{D}$ est conçu comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. En fait, la définition mathématique de l'ensemble des décimaux est la suivante :

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}, \exists\, p \in \mathbb{Z}, 10^p\, x \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{a}{10^p}, a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}$. Cette définition est rigoureuse !

Puisque 0,9999999… = 1, alors on a bien $0{,}99999999\ldots \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. Pourtant, il a bien un développement décimal illimité…

On ne peut évidemment pas formaliser les choses ainsi en collège… Mais on peut dire :

Caractérisation 2 :

« Un nombre décimal est un nombre qui PEUT S'ECRIRE sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1000… »

L'avantage est de lier les nombres décimaux aux fractions décimales ce qui est un attendu du programme, tout en restant rigoureux.

● Conséquences de ce dernier choix

α) **Tous les entiers sont des décimaux particuliers**

β) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **n'est pas décimal** (6ème). Supposons qu'il le soit. Alors il est de la forme a/10, a/100, … où a est un entier. Mais alors l'une des puissances de 10 serait un multiple de 3. C'est faux d'après les critères de divisibilité (et sans même avoir à poser la division décimale).

γ) $\mathbf{\sqrt{2}}$ **n'est pas décimal** (3ème)

Supposons qu'il le soit. $\exists\ (a, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sqrt{2} = \dfrac{a}{10^p}$ avec a non multiple de 10. Par suite, $2 \times 10^{2p} = a^2$.

Si $p = 0$, alors $a^2 = 2$, ce qui est impossible puisque $a \in \mathbb{Z}$

Si $p \neq 0$, alors a^2 est un multiple de 10. Or a ne l'est pas donc son chiffre des unités appartient à $\{1, \ldots, 9\}$. On fait le tableau des carrés. Contradiction. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Cette démonstration évite l'écueil de l'association d'un nombre décimal à son écriture décimale et est très intéressante pour la formation mathématique des élèves :

- raisonnement par l'absurde
- raisonnement par disjonction des cas à deux reprises