

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES 2024

Métropole-La Réunion-Mayotte-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.
- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'ayant PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter les exercices académiques 1 et 3. De plus **la feuille Annexe (page 8) devra être décrochée** du sujet et rendue avec la copie.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Exercices académiques

Mercredi 20 mars 2024 (10 h 10 – 12 h 10)

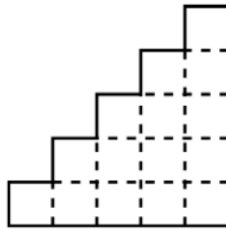
L'énoncé académique comporte 8 pages dont une annexe.

Exercice 1 (tous les candidats)**Escagone**

Soit n un entier naturel non nul.

Un **escagone** de hauteur n est une figure formée de n colonnes. Chacune de ces colonnes est constituée de carrés unités avec 1 carré unité sur la première colonne, 2 carrés unités sur la deuxième, ... la dernière colonne est constituée de n carrés unités.

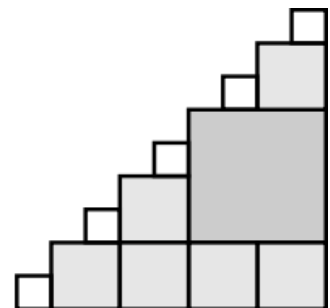
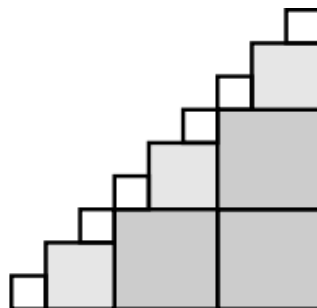
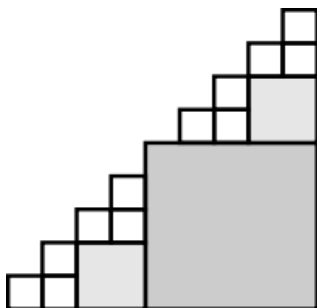
La figure ci-dessous montre un escagone de hauteur $n = 5$.



On s'intéresse, dans cet exercice, au recouvrement d'un escagone de hauteur n par des **tuiles carrées** dont le côté est multiple de l'unité :

- qui ne se chevauchent pas ;
- dont les tailles peuvent être différentes.

Les trois figures ci-dessous montrent trois recouvrements différents d'un même escagone de hauteur $n = 9$:



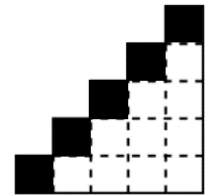
- à gauche : douze tuiles de côté 1, deux tuiles de côté 2 et une tuile de côté 5, soit quinze tuiles au total ;
- au milieu : six tuiles de côté 1, trois tuiles de côté 2 et trois tuiles de côté 3, soit douze tuiles au total ;
- à droite : cinq tuiles de côté 1, six tuiles de côté 2 et une tuile de côté 4, soit douze tuiles au total.

On cherche plus particulièrement à déterminer le nombre minimal de tuiles carrées nécessaires pour recouvrir un escagone de hauteur n ; on note ce nombre minimal $T(n)$.

Par exemple on peut vérifier que, $T(1) = 1$; $T(2) = 3$; $T(3) = 3$.

1. Montrer que $T(4) = 7$ et dessiner un recouvrement minimal d'un escagone de hauteur 4 par sept tuiles.
2. Déterminer $T(5)$.

On appelle carré de la diagonale un carré unité situé en haut d'une colonne (en noir dans l'escagone ci-contre de hauteur 5).



3. Justifier que le nombre total de tuiles nécessaires à un recouvrement de l'escagone est supérieur ou égal au nombre de carrés de la diagonale. En déduire que $T(n) \geq n$ pour tout n entier.

Questions de parité

4. Dans cette question, on suppose $T(n) = n$. Justifier alors que la tuile qui recouvre le carré unité en bas à droite recouvre aussi un carré de la diagonale. En déduire que n est un entier naturel impair.
5. La condition n impair est-elle suffisante pour avoir $T(n) = n$?
6. Justifier que $T(6) \geq 7$. Que vaut $T(6)$?

Le cas $T(n) = n$

7. On considère un escagone de hauteur n tel que $T(n) = n$. Montrer que le carré unité en bas de la deuxième colonne est recouvert par une tuile de côté 2.
8. En déduire que si $T(n) = n$ alors l'entier n est de la forme :
- $$n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k, \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$
9. Montrer que la réciproque est vraie.
10. En conclure que $T(n) = n$ si et seulement si $n = 2^{k+1} - 1$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
11. Justifier que $T(7) = 7$ et proposer un recouvrement réalisant $T(7)$.

Escagone de hauteur $n = 8$

Pour les questions suivantes, on considèrera uniquement le cas d'un escagone de hauteur 8.

12. Donner un recouvrement utilisant une tuile de côté 4 de l'escagone utilisant le moins de tuiles possibles. En déduire un premier encadrement de $T(8)$.
13. Donner un recouvrement minimal de l'escagone utilisant trois tuiles de côté 3. En déduire que $9 \leq T(8) \leq 12$.
14. On considère un recouvrement par des tuiles de taille 3 maximum. On note n_1 , n_2 et n_3 , le nombre respectif de tuiles de côté 1, 2 et 3 qui recouvrent l'escagone. Exprimer son aire en fonction de n_1 , n_2 et n_3 .
15. Déterminer la valeur exacte de $T(8)$ et dessiner un pavage réalisant $T(8)$ (observer que ce pavage n'est pas symétrique).

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)**Disque pincé**

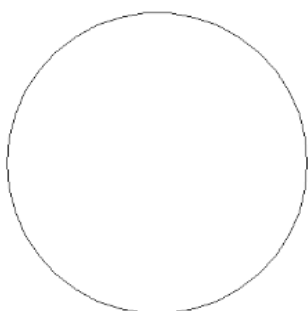
Les différentes parties de l'exercice sont indépendantes.

Une unité de longueur a été choisie.

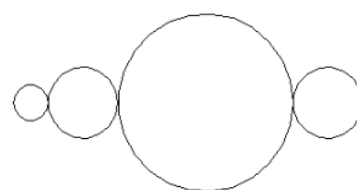
On appelle **disque initial** un disque délimité par une ficelle non extensible de longueur 1.

On pince ce disque une ou plusieurs fois (pincer consiste à joindre deux points distincts de la ficelle pour former deux nouveaux disques). La figure alors obtenue, appelée **disque pincé**, est constituée de plusieurs disques dont la somme des circonférences vaut 1 (circonférence du disque initial).

Disque initial de circonférence 1



Disque pincé (trois fois)



Sur cet exemple, les quatre disques ont pour circonférences $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{10}$ et $\frac{2}{10}$. La somme de ces circonférences vaut 1.

On note Q le quotient de l'aire du disque pincé par l'aire du disque initial. Par exemple, si l'aire du disque pincé vaut les deux tiers de celle du disque initial alors $Q = \frac{2}{3}$.

L'objectif principal de l'exercice est de chercher, sous certaines contraintes, comment pincer le disque initial pour rendre Q le plus petit possible.

À cet effet, on rappelle que la circonférence d'un disque de rayon r est $2\pi r$ et que son aire est πr^2 .

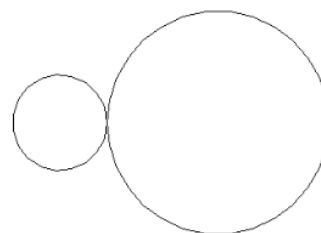
Questions préliminaires

1. Montrer que l'aire du disque initial vaut $\frac{1}{4\pi}$.
2. Calculer Q dans le cas d'un disque pincé constitué de deux disques dont un a pour circonférence $\frac{1}{3}$.
3. Calculer Q dans le cas d'un disque pincé constitué de trois disques parmi lesquels un a pour circonférence $\frac{1}{10}$ et un autre $\frac{1}{2}$.

Disque pincé une fois

On note x et y les circonférences des deux disques constituant le disque pincé avec x et y deux nombres réels strictement positifs. On suppose, sans perte de généralité, que $0 < x \leq y$.

4. Quelles sont la valeur minimale et la valeur maximale de x ?
5. Montrer que $Q = x^2 + (1 - x)^2$.



6. Peut-on faire en sorte que l'aire du disque pincé soit égale aux trois quarts de celle du disque initial ? Au tiers ? Peut-elle être supérieure ou égale à celle du disque initial ?
7. Déterminer la (ou les) valeur(s) de x rendant Q le plus petit possible.

Disque pincé deux fois

On note x , y et z les circonférences des trois disques du disque pincé avec x , y et z des nombres réels strictement positifs vérifiant $x + y + z = 1$.

On suppose, sans perte de généralité, que $0 < x \leq y \leq z$.

8. Montrer que $z \geq \frac{1}{3}$ et $x \leq \frac{1}{3}$.

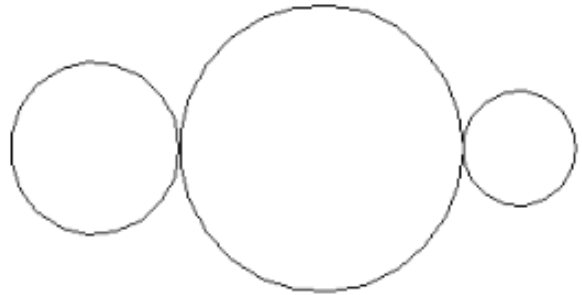
9. Montrer que :

$$Q = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

et vérifier alors que :

$$Q - \frac{1}{3} = 2 \left[\left(y - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} - x \right) \left(z - \frac{1}{3} \right) \right]$$

10. Déterminer les valeurs de x , y et z rendant Q le plus petit possible.
11. Développer l'expression $(x + y + z)^2$.
12. Le disque pincé peut-il avoir une aire supérieure ou égale à celle du disque initial ? Justifier.

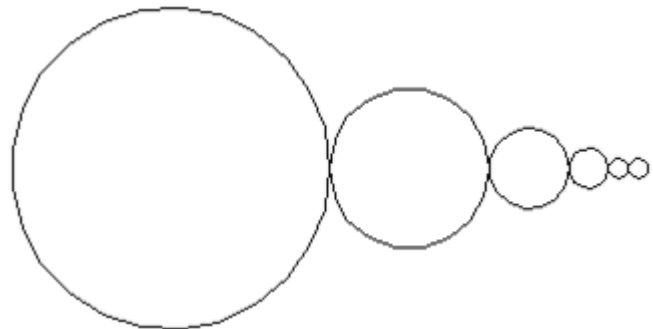


Disque pincé n fois dans un cas particulier

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère un disque pincé constitué de $n + 1$ disques, parmi lesquels les n premiers disques ont pour circonférences les nombres $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ où l'entier k varie de 1 à n .

13. Exprimer le plus simplement possible la circonférence du dernier disque constituant le disque pincé.
14. Montrer que $Q > \frac{1}{3}$ dans ce cas particulier.
15. Ecrire un algorithme renvoyant la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle :

$$Q - \frac{1}{3} < 10^{-9}$$



Disque pincé n fois dans le cas général

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère un disque pincé constitué de $n + 1$ disques dont on note $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ les circonférences respectives.

16. Développer et réduire l'expression $\left(x_1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \dots + \left(x_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2$ afin de l'exprimer en fonction de Q .
17. En déduire les valeurs des réels $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ rendant Q le plus petit possible.

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

Transformation Moyenne/Écart-type

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O .

On note D le domaine constitué des points dont l'abscisse x et l'ordonnée y vérifient $x \geq y \geq 0$ où x et y sont des nombres réels.

Par exemple, les points de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ ou $(1; 0)$ appartiennent à D , en effet $\frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \geq 0$ de même que $1 \geq 0 \geq 0$. Par contre ce n'est pas le cas des points de coordonnées $(1; -1)$ ou $(0,5; 4)$ car $-1 \leq 0$ et $0,5 \leq 4$.

1. Sur le graphique fourni en annexe, placer deux points W et Z (distincts des précédents) n'appartenant pas à D , puis hachurer le domaine constitué des points n'appartenant pas à D .

Pour chaque point M appartenant à D , on note M' le point dont l'abscisse est la moyenne m des coordonnées de M et dont l'ordonnée est l'écart-type s des coordonnées de M .

Ce nouveau point M' est appelé l'image du point M par la transformation Moyenne/Écart-type que l'on notera M/E.

Par exemple, l'image du point $A(5; 3)$ est le point $A'(4; 1)$ puisque :

$$m = \frac{5+3}{2} = 4 \text{ et } s = \sqrt{\frac{(5-m)^2 + (3-m)^2}{2}} = 1$$

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés de cette transformation Moyenne/Écart-type.

2. Vérifier que l'image du point $B(8; 2)$ est le point $A(5; 3)$.
3. Déterminer les coordonnées du point A'' , image du point $A'(4; 1)$.
4. Sur le graphique fourni en annexe, placer les points B , A , A' et A'' .

Dans la suite de l'exercice, $M(x; y)$ est un point appartenant à D . On a donc $x \geq y \geq 0$.

5. Montrer que l'écart-type des coordonnées de M vaut $\frac{x-y}{2}$.
6. Montrer que le point M' appartient à D .
7. Pour quelles valeurs de x et y le point M' est-il confondu avec le point M ?

8. La feuille de calcul suivante a été obtenue avec un tableur. Le point M'' désigne l'image du point M' par la transformation M/E.

	A	B	C	D	E	F
1	Abscisse de M	Ordonnée de M	Abscisse de M'	Ordonnée de M'	Abscisse de M''	Ordonnée de M''
2	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0,5	0,5	0,5	0
4	1	1	1	0	0,5	0,5
5	2	1	1,5	0,5	1	0,5
6	2	2	2	0	1	1
7	3	0	1,5	1,5	1,5	0
8	3	1	2	1	1,5	0,5
9	3	3	3	0	1,5	1,5
10	4	0	2	2	2	0
11	4	1	2,5	1,5	2	0,5
12	4	2	3	1	2	1
13	4	3	3,5	0,5	2	1,5
14	4	4	4	0	2	2

- Quelles formules a-t-on saisies et étirées vers le bas, dans les cellules C2, D2, E2 et F2?
 - En comparant les deux premières et les deux dernières colonnes, quelle conjecture peut-on formuler concernant M'' ?
 - Démontrer cette conjecture.
9. On applique successivement 4049 fois la transformation M/E en partant du point $C(2^{2025}; 2^{2023})$. Quel est le point final obtenu ?
10. On note Δ la demi-droite constituée des points dont l'abscisse x et l'ordonnée y vérifient :

$$x \geq 0 \text{ et } y = (\sqrt{2} - 1)x$$

La droite Δ a été tracée sur le graphique fourni en annexe.

- Justifier que Δ est incluse dans D .
- Montrer que si M appartient à Δ alors M' appartient à Δ .
- Soit $M(x; y)$ un point appartenant au domaine D et M' son image par la transformation M/E. On note N l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire tel que :

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{OM}$$

Montrer que M' est le symétrique du point N par rapport à Δ .

Annexe

(à rendre par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

