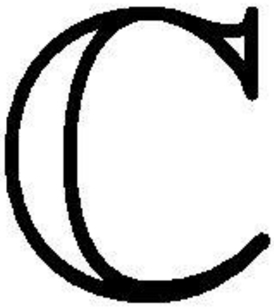
Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

A partir d'un complexe de module 1



Une activité en Terminale S.

Enoncé l'activité

z est un nombre complexe de module 1 et distinct de 1.

Etudier le nombre complexe : $\dfrac{z+1}{z-1}$

Objectifs

Cette activité a été testée en milieu d'année en Terminale S alors que les chapitres sur les nombres complexes sont terminés. Les élèves sont en demi-classe , en salle informatique. Il s ont déjà un peu utilisé un tableur, Xcas , Géogébra et GéoplanGéospace (version gratuite avec possibilité d'utiliser les complexes).
Il s'agit d'une activité de synthèse sur les nombres complexes : c'est l'étude de différentes stratégies qui fait la richesse de cette situation.

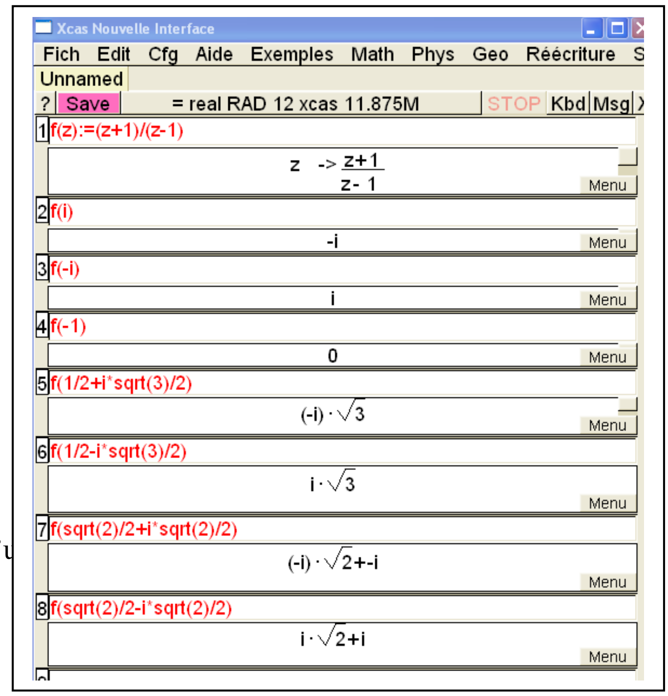
Scénario

► Les élèves font quelques essais en choisissant quelques nombres complexes de module 1 :

quand z = i , $\dfrac{z+1}{z-1}=-i$ quand z = $-i$, $\dfrac{z+1}{z-1}=i$ quand z = -1 , $\dfrac{z+1}{z-1}=0$

Les calculs se font d'abord à la main.
Ils ont ensuite quelques difficultés pour trouver d'autres complexes de module 1 :

ils pensent à $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et le calcul devenant plus long,
certains choisissent d'ouvrir Xcas.



Des conjectures sont avancées :

Pour tout complexe *z* de module 1 et distinct de 1 :

- On dirait que : *f*(conj(*z*))= – *f*(*z*)
- On dirait que : *f*(conj(*z*))= conj(*f*(*z*))
- On dirait que *f*(*z*) est imaginaire pur

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

remarque : on peut montrer que
ces trois conjectures sont équivalentes

► D'autres essais semblent nécessaires, il faut donc rechercher d'autres complexes de module 1.

Nouvelle idée : l'écriture exponentielle (si elle fonctionne avec Xcas).

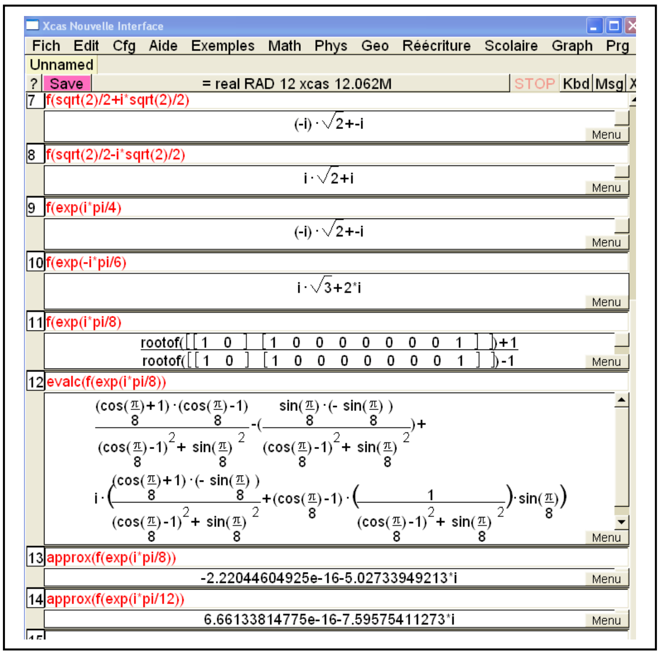
Ils obtiennent un résultat réconfortant pour $f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$,

étonnant pour $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ mais les commandes

evalc ou approx permettent de continuer…

La partie réelle de $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ semble bien nulle.

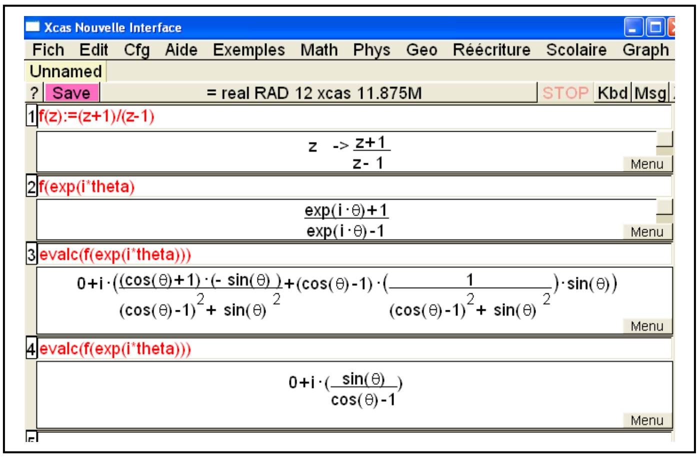
La conjecture *f*(*z*) est imaginaire pur sort renforcée.



► L'idée de généraliser avec $e^{i\theta}$ apparaît enfin.
La partie réelle de $f\left(e^{i\theta}\right)$ semble nulle.

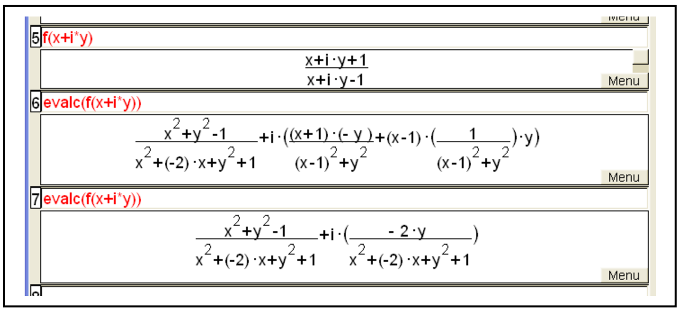
Les élèves effectue la preuve à la main en utilisant
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Une première preuve est établie :
f(z) est bien imaginaire pur.

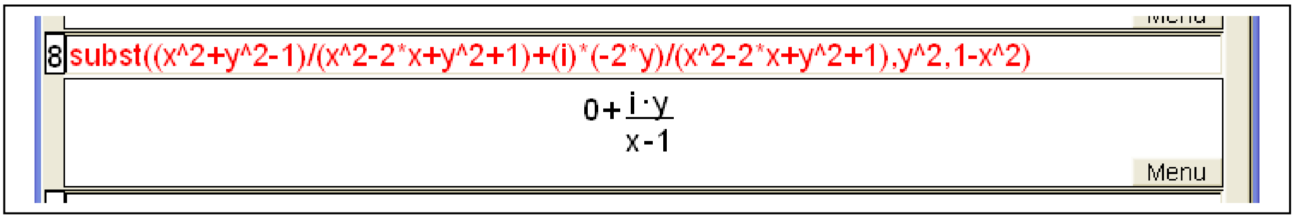


► Certains ont pensé à la notation algébrique mais oublient dans un premier temps que $x^2 + y^2 = 1$….

Finalement, **une deuxième preuve est établie.**



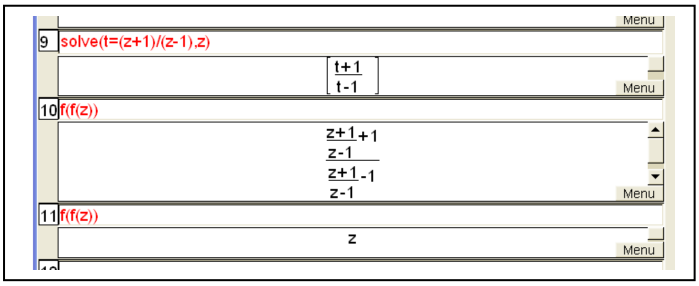
Remarque à destination des professeurs: on peut poursuivre avec Xcas en utilisant la commande Subst qui permet de remplacer y^2 par $1-x^2$ dans l'expression de $f(x+iy)$:



► **Une troisième piste** :

En commençant par poser $t=\dfrac{z+1}{z-1}$, un élève a fait des calculs qui revenaient (sans l'exprimer clairement) à exprimer *z* en fonction de *t*.

En avançant dans cette voie, et en remarquant que *t* ne peut pas être égal à 1,il trouve $z=\dfrac{t+1}{t-1}$, ce qui l'étonne … et conduit à l'idée que $f(f(z))=z$ ce qui se vérifie par exemple avec Xcas.



Il développe alors une preuve géométrique :

En appelant *I* le point d'affixe 1 , *K* le point d'affixe –1, *M* le point d'affixe *z* et *N* le point il obtient : $z=\dfrac{z_N-z_K}{z_N-z_I}$.

Dire que le module de *z* est égal à 1 revient à dire que *NK*=*NI* ou encore que *N* appartient à la médiatrice du segment [*KI*], donc à l'axe des ordonnées. Ce qui assure que *t* est imaginaire pur.

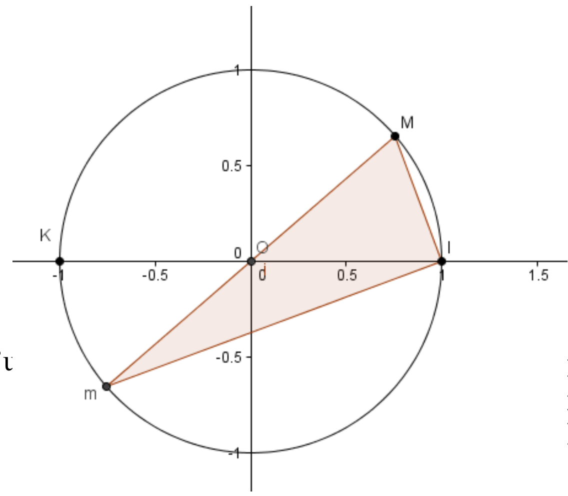
► **Une quatrième piste** :

Après avoir conjecturé que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur, un élève découvre ce joli raisonnement géométrique :

En appelant *I* le point d'affixe 1, *K* le point d'affixe –1,
M le point d'affixe *z* et *m* le point d'affixe – *z*, on peut écrire : $\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{1-(-z)}{z-1}=\dfrac{z_I-z_m}{z_M-z_I}$

D'où : $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)=(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{mI})\ [2\pi]$

Ce qui achève la preuve car

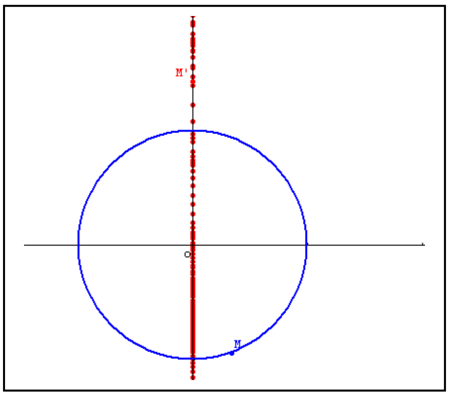


le triangle *IMm* étant rectangle en I,

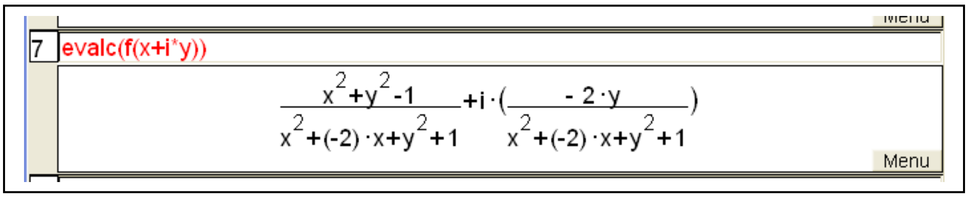
$\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $\dfrac{z+1}{z-1}$ est bien un imaginaire pur.

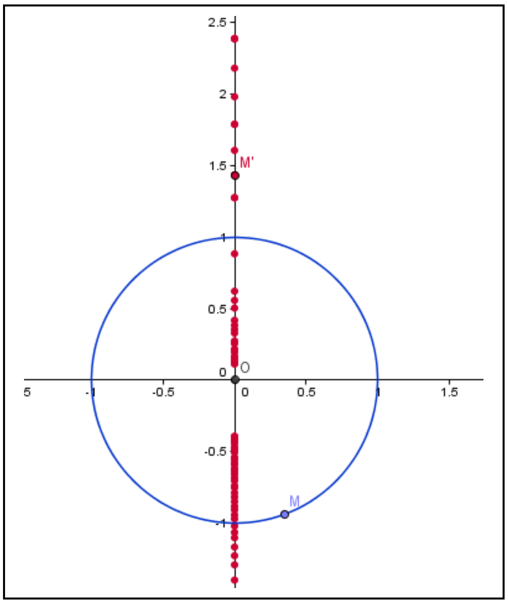
► **Une cinquième piste (que j'attendais plus tôt) : utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique .**

✔ Le plus adapté est GéoplanGéospace qui permet une conjecture très rapide.



✔ Avec géogébra, il peut y avoir couplage avec un logiciel de calcul formel





► **Une sixième piste avec les conjugués.**

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

Pour tout complexe z de module 1, on a $z\overline{z}=1$ et comme z est distinct de 1 :

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}=\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=\frac{z\left(\overline{z}+1\right)}{z\left(\overline{z}-1\right)}=\frac{z\overline{z}+z}{z\overline{z}-z}=\frac{1+z}{1-z}=-\frac{z+1}{z-1}$$ ce qui assure que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

Voici les résultats avec Dérive 6 :

#4: $f\left(\frac{1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

#5: $-\sqrt{3}\cdot i$

#6: $f(e^{i\cdot\pi/4})$

#7: $-i\cdot(\sqrt{2}+1)$

#8: $f(e^{i\cdot\pi/8})$

#9: $-i\cdot(\sqrt{(2\cdot\sqrt{2}+4)}+\sqrt{2}+1)$

#10: $f(e^{i\cdot\pi/12})$

#11: $-i\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)$

#12: $f(e^{i\cdot\theta})$

#13: $-i\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

#14: $f(\mathrm{COS}(\theta)+i\cdot\mathrm{SIN}(\theta))$

#15: $-i\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

#16: $f(x+i\cdot y)$

#17: $\frac{x^2+y^2-1}{x^2-2\cdot x+y^2+1}-\frac{2\cdot i\cdot y}{x^2-2\cdot x+y^2+1}$

#18: $\frac{x^2+(1-x^2)-1}{x^2-2\cdot x+(1-x^2)+1}-\frac{2\cdot i\cdot y}{x^2-2\cdot x+(1-x^2)+1}$

#19: $\frac{i\cdot y}{x-1}$

Compétences expérimentales :

► Faire des essais pour énoncer, renforcer, tester une conjecture.
► Utiliser différentes écritures d'un même nombre
► Prendre l'initiative de mobiliser un logiciel de géométrie dynamique pour illustrer la situation.
► Prendre l'initiative de mobiliser le calcul formel pour obtenir rapidement un grand nombre de résultats .
► Prendre l'initiative de mobiliser le calcul formel pour accompagner un calcul « à la main ».

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

En guise d'évaluation :

Rédiger deux preuves différentes de la conjecture trouvée.