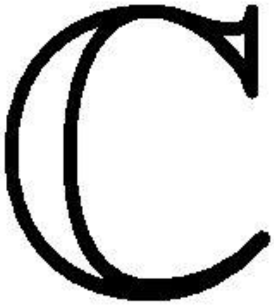
Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

A partir d'un complexe de module 1



Une activité en Terminale S.

Enoncé l'activité

z est un nombre complexe de module 1 et distinct de 1.

Etudier le nombre complexe : $\frac{z+1}{z-1}$

Objectifs

Cette activité a été testée en milieu d'année en Terminale S alors que les chapitres sur les nombres complexes sont terminés. Les élèves sont en demi-classe , en salle informatique. Il s ont déjà un peu utilisé un tableur, Xcas , Géogébra et GéoplanGéospace (version gratuite avec possibilité d'utiliser les complexes).
Il s'agit d'une activité de synthèse sur les nombres complexes : c'est l'étude de différentes stratégies qui fait la richesse de cette situation.

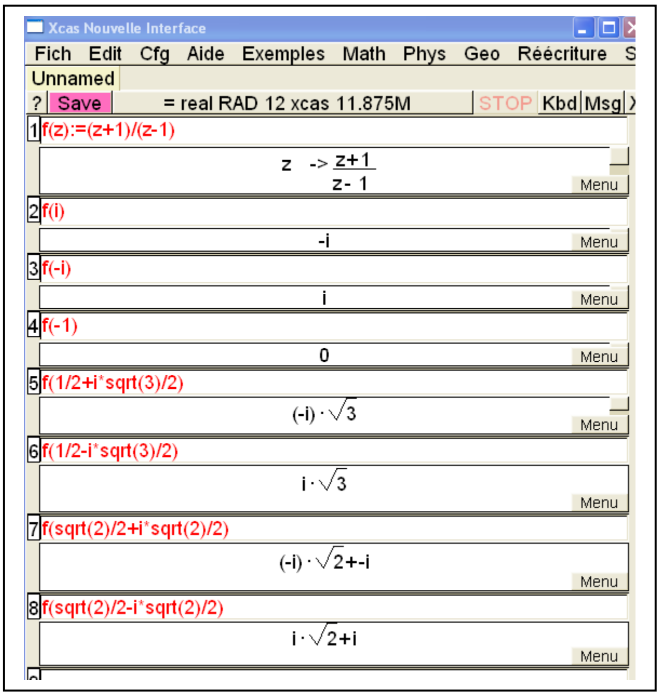
Scénario

►Les élèves font quelques essais en choisissant quelques nombres complexes de module 1 :

quand z = *i*, $\frac{z+1}{z-1}=-i$ quand z = -*i* , $\frac{z+1}{z-1}=i$ quand z = -*1* , $\frac{z+1}{z-1}=0$

Ils ont ensuite quelques difficultés pour trouver d'autres complexes de module 1 :

ils pensent à $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le calcul devenant plus long, certains choisissent d'ouvrir Xcas.



Des conjectures sont données :

-Le module de *f*(*z*) : il n'est pas toujours égal à 1.

-On dirait que : *f*(conj(z))=–*f*(conj(z))

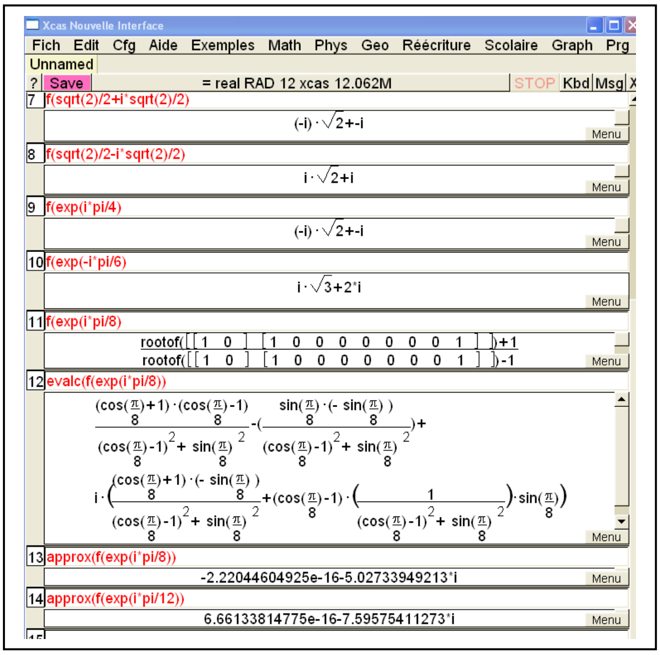
-On dirait que *f*(*z*) est imaginaire pur

remarque : prouver que *f*(*z*) est imaginaire pur revient à prouver que *f*(conj(z))= –*f*(conj(z)).

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

► D'autres essais semblent nécessaires, il faut donc rechercher d'autres complexes de module 1.

Nouvelle idée : l'écriture exponentielle (si elle fonctionne avec Xcas).



Ils obtiennent un résultat réconfortant pour $f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$,

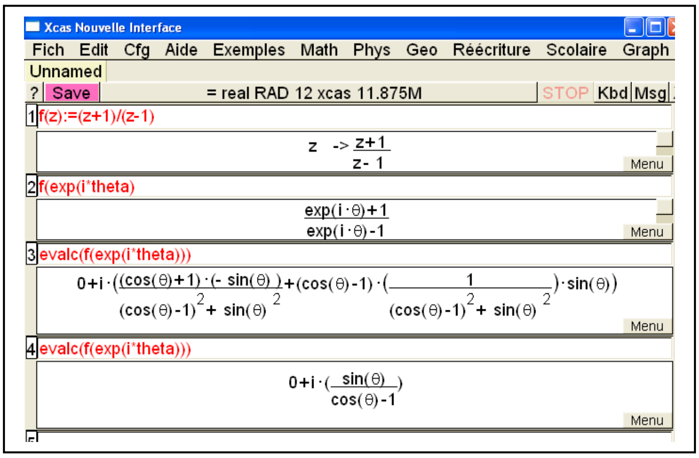
étonnant pour $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ mais les commandes evalc ou approx permettent de continuer…

La partie réelle de $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ semble bien nulle.

La conjecture *f*(*z*) est imaginaire pur sort renforcée.

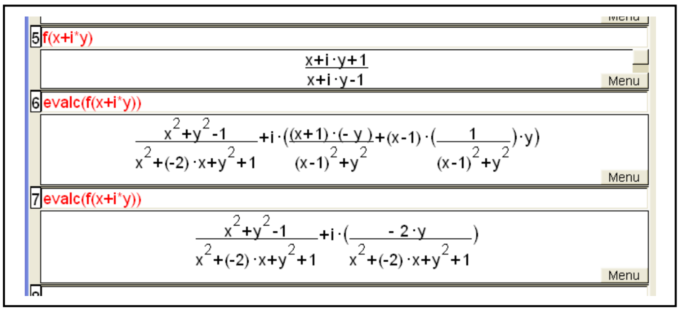
► L'idée de généraliser avec $e^{i\theta}$ apparaît enfin.

La partie réelle de $f\left(e^{i\theta}\right)$ semble nulle.



Les élèves effectue la preuve à la main en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Une première preuve est établie :
f(z) est bien imaginaire pur.

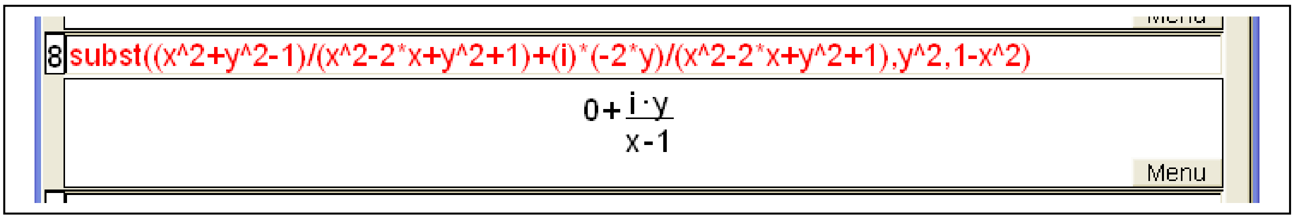


► Certains ont pensé à la notation algébrique, mais oublient que $x^2 + y^2 = 1$….

Finalement, **une deuxième preuve est établie.**

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

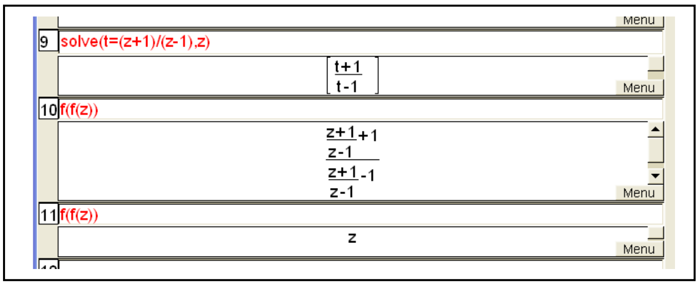
Remarque à destination des professeurs: on peut poursuivre avec Xcas avec la commande Subst



► **Une troisième piste** :

En commençant par poser : $t=\dfrac{z+1}{z-1}$, un élève a fait des calculs qui revenaient (sans l'exprimer clairement) à exprimer *z* en fonction de *t*.

En avançant dans cette voie, et en remarquant que *t* ne peut pas être égal à 1, on trouve $z=\dfrac{t+1}{t-1}$, ce qui étonne … et conduit à l'idée que $f(f(z))=z$ ce qui se vérifie par exemple avec Xcas.



On peut alors développer une preuve géométrique :
On appelle *I* le point d'affixe 1 et *K* le point d'affixe –1

On appelle *M* le point d'affixe *z* et *N* le point d'affixe *t*. On donc peut écrire $z=\dfrac{z_N-z_K}{z_N-z_I}$.

Dire que le module de *z* est égal à 1 revient à dire que *NK*=*NI* ou encore que *N* appartient à la médiatrice du segment [*KI*], donc à l'axe des ordonnées. Ce qui assure que *t* est imaginaire pur.

► **Une quatrième piste** :

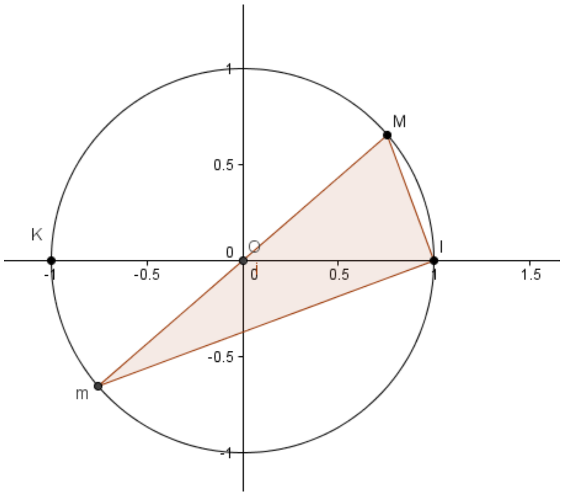
Après avoir conjecturé que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur, un élève découvre ce joli raisonnement géométrique :

On appelle *I* le point d'affixe 1 et *K* le point d'affixe –1
On appelle *M* le point d'affixe *z* et *m* le point d'affixe -*z*.

On donc peut écrire : $\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{1-(-z)}{z-1}=\dfrac{z_I-z_m}{z_M-z_I}$

D'où : $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)=(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{mI})\quad[2\pi]$

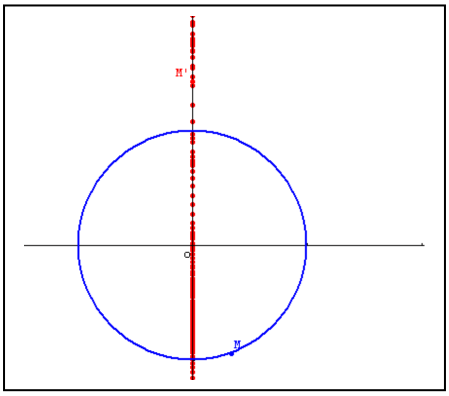
Ce qui achève la preuve car
le triangle *IMm* est rectangle en I.



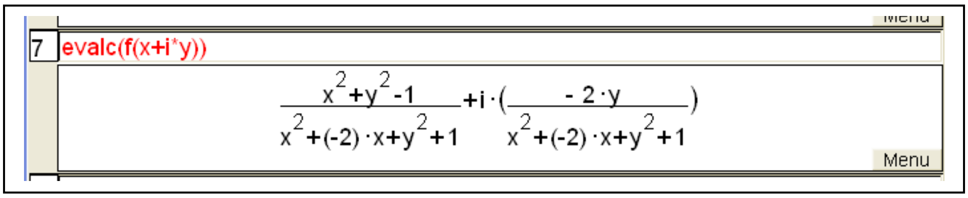
Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

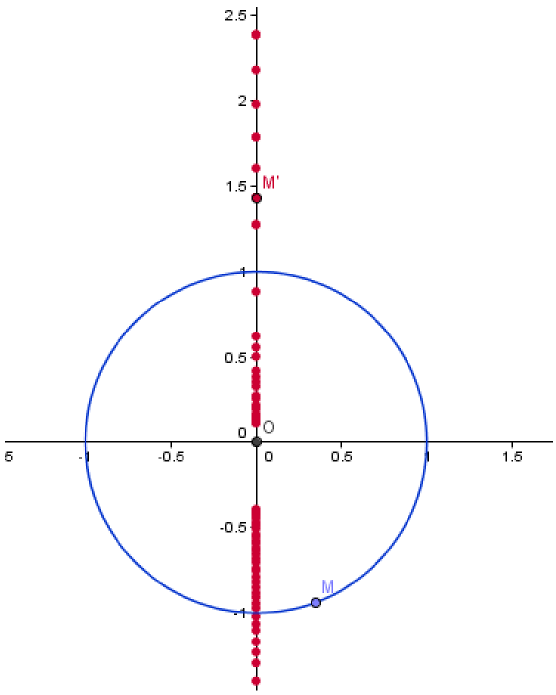
► Une cinquième piste (que j'attendais plus tôt) : utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

✔ Le plus adapté est GéoplanGéospace qui permet une conjecture très rapide.



✔ Avec géogébra, il peut y avoir couplage avec un logiciel de calcul formel





► Une sixième piste :
Par un produit en croix, pour tout complexe z distinct de 1, $f(\overline{z}) = -f(z)$ revient à $z\overline{z} = 1$

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

Voici les résultats avec Dérive 6 :

#4: $f\left(\frac{1}{2} + \frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

#5: $-\sqrt{3}\cdot i$

#6: $f(e^{i\cdot\pi/4})$

#7: $-i\cdot(\sqrt{2} + 1)$

#8: $f(e^{i\cdot\pi/8})$

#9: $-i\cdot(\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 4)} + \sqrt{2} + 1)$

#10: $f(e^{i\cdot\pi/12})$

#11: $-i\cdot(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2)$

#12: $f(e^{i\cdot\theta})$

#13: $-i\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

#14: $f(\mathrm{COS}(\theta) + i\cdot\mathrm{SIN}(\theta))$

#15: $-i\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

#16: $f(x + i\cdot y)$

#17: $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - 2\cdot x + y^2 + 1} - \frac{2\cdot i\cdot y}{x^2 - 2\cdot x + y^2 + 1}$

#18: $\frac{x^2 + (1 - x^2) - 1}{x^2 - 2\cdot x + (1 - x^2) + 1} - \frac{2\cdot i\cdot y}{x^2 - 2\cdot x + (1 - x^2) + 1}$

#19: $\frac{i\cdot y}{x - 1}$

Compétences expérimentales :

► Faire des essais pour énoncer, renforcer, tester une conjecture.
► Utiliser différentes écritures d'un même nombre
► Prendre l'initiative de mobiliser un logiciel de géométrie dynamique pour illustrer la situation.
► Prendre l'initiative de mobiliser le calcul formel pour obtenir rapidement un grand nombre de résultats .
► Prendre l'initiative de mobiliser le calcul formel pour accompagner un calcul « à la main ».

En guise d'évaluation :

Rédiger deux preuves différentes de la conjecture trouvée.