ministère
éducation
nationale
ÉduSCOL
[dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques
Collège

Projet de document d’accompagnement

- Grandeurs et mesures -

Septembre 2007

Grandeurs et mesures

1. Évolution de la place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques

Les grandeurs ont longtemps occupé une place importante dans l'enseignement des mathématiques, à l'école et au collège. Puis leur place s'est beaucoup réduite, notamment dans la période des mathématiques modernes, au profit des nombres. Les programmes actuels de l'école et du collège leur redonnent une place plus importante, alors que leur visibilité dans la vie sociale a beaucoup évolué : d'une part, la disparition de l'usage de certains instruments (chaîne d'arpenteur, balance de Roberval, …) prive l'enseignement de référence à des pratiques sociales convoquant des grandeurs aussi fondamentales que les longueurs et les masses ; d'autre part, deux faits aussi différents que l'obligation légale d'affichage des prix par kilogramme (ou par litre) et l'emploi dans chaque secteur d'activité de grandeurs bien spécifiques (par exemple, le rendement moyen par mètre carré et par an d'un établissement commercial) mettent en évidence le besoin socio-économique de grandeurs composées plus complexes.

L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire se trouve ainsi confronté à deux nouvelles obligations.

- La première consiste à redonner du sens à des grandeurs aussi fondamentales que les longueurs, les aires, les masses … dans un contexte social où elles ont une moindre visibilité et y sont fortement remplacées par des nombres (leurs mesures, moyennant le choix d'unités). Or la plupart des professeurs ont fait leurs études à un moment où les grandeurs étaient bannies de l'enseignement des mathématiques.
- La deuxième obligation n'est pas une nouveauté, les notions de grandeurs quotients, grandeurs produits et grandeurs composées figurant déjà dans les précédents programmes.

Le paragraphe 2 intitulé "Objets, grandeurs, mesures" a pour but de justifier qu'il est impossible d'opérer directement sur les objets (comme pourraient le suggérer des expressions très couramment utilisées telles que « le cinquième d'une tarte »), et qu'on ne peut pas faire l'économie des grandeurs, qui sont des abstractions à partir des caractéristiques des objets de la vie courante. Comme le précisent les documents d'accompagnement en mathématiques de l'école primaire, dans un chapitre intitulé « Grandeurs et mesure à l'école élémentaire »[1], ce passage des objets aux grandeurs est déjà travaillé à l'école :

> "Le fait d'annoncer la bonne unité de mesure à la suite du nombre n'est pas suffisant pour que les élèves se représentent correctement une grandeur (par exemple pour qu'ils différencient aire et périmètre) : il est nécessaire qu'ils aient préalablement travaillé sur les propriétés de chacune de ces grandeurs. […] Les premières activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne. Le concept s'acquiert progressivement en résolvant des problèmes de comparaison, posés à partir de situations vécues par les élèves. De tels problèmes amènent à classer des objets : certains, pourtant d'apparences différentes, sont équivalents selon un critère déterminé, longueur, aire, …».

Le paragraphe 3 fournit au professeur de collège les éléments indispensables d'une théorie des principales grandeurs, indépendamment de la question de la mesure : longueurs, angles, aires, volumes, masses, durées, grandeurs discrètes, cette théorie étant une mathématisation à l'intention du professeur de collège de ce qui est enseigné à l'école (et non pas une description des programmes en question). Pour chacune de ces grandeurs, on est conduit à considérer des objets, puis à définir sur leur ensemble une relation d'équivalence,

[1] Voir la référence [1] en bibliographie, page 79.

une relation de préordre et une addition ; les grandeurs sont les classes d'équivalence, et il est possible, en ce qui les concerne, de définir une relation d'ordre et une addition, puis la multiplication par un nombre entier, la division par un nombre entier, le rapport de deux grandeurs de même espèce … Ensuite, mais ensuite seulement, on peut aborder la question de la mesure des grandeurs, et de l'introduction des nombres qu'elle nécessite. Les systèmes de nombres (entiers, décimaux et rationnels) apparaissent ainsi comme réponses au problème de la mesure des grandeurs (en particulier, des longueurs).

Le paragraphe 4 traite des grandeurs quotients, notion qui généralise au cas de deux grandeurs d'espèces différentes, le quotient de deux grandeurs de même espèce. Mais si ce dernier est un nombre, le quotient d'une longueur par une durée n'en est pas un. Ces grandeurs quotients ont longtemps été absentes en mathématiques, ce qui a conduit à des difficultés d'enseignement, notamment du point de vue langagier. Ainsi, dire que la vitesse est une longueur parcourue par unité de temps laisse penser qu'une vitesse est une longueur ; de même qu'une masse volumique est une masse … On devine la difficulté pour un élève à interpréter le « coefficient de proportionnalité » (ou son inverse) dans une situation convoquant deux grandeurs proportionnelles. Ainsi, par exemple, la formule $v = \frac{d}{t}$ peut s'interpréter de deux manières. Ou bien *d*, *v* et *t* désignent des mesures (avec des unités convenables) des grandeurs que ces lettres évoquent directement : il s'agit alors d'un calcul purement numérique ; ou bien, comme c'est le cas dans de nombreuses disciplines et dans l'enseignement des mathématiques dans des pays voisins (Voir l'annexe 5, dernier exemple), les lettres désignent les grandeurs elles-mêmes et la formule $v = \frac{d}{t}$ constitue une définition de la vitesse, *indépendante des unités choisies*. Par exemple, la vitesse d'une balle de tennis lors du service d'un joueur est de 197 km/h. La formule $v = \frac{d}{t}$ permet d'obtenir facilement la conversion de cette vitesse en m/s, à l'aide du calcul suivant :

$$v = 197\ \text{km/h} = \frac{197\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{197\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = \frac{197\,000}{3\,600}\ \text{m/s}$$

soit environ 54,7 m/s, résultat beaucoup plus significatif pour le spectateur. Il est possible de mathématiser cette notion de grandeur quotient, de même que celle de grandeur produit, qui généralise le cas des aires et des volumes, et qui, avec les grandeurs composées, fait l'objet du paragraphe 5.

Le paragraphe 6 a pour but d'illustrer à chaque niveau d'enseignement le parti que l'on peut tirer des calculs sur les grandeurs pour fournir des techniques de traitement pour les types de tâches suivants : les conversions, les problèmes de proportionnalité, et à partir de la classe de 4^{e} la mise en équation d'une situation convoquant des grandeurs.

Enfin, le paragraphe 7 montre l'intérêt des calculs sur différentes paires de grandeurs proportionnelles pour dégager ce qu'elles ont en commun, et dégager le modèle numérique qui leur est commun : la fonction linéaire. Le même travail est esquissé pour la suite de l'enseignement des fonctions.

2. Objets, grandeurs, mesures

Un même objet peut être le support de *plusieurs* grandeurs d'espèces différentes, usuelles ou non, dont la considération dépend du type de traitement auquel on veut soumettre cet objet. C'est ce que rappelle l'extrait suivant d'une brochure publiée en 1982 par l'APMEP intitulée

“ Grandeur Mesure ” (collection *Mots*, réflexions sur quelques mots-clés à l’usage des instituteurs et des professeurs)[2] :

> « À propos d’un même objet, plusieurs grandeurs peuvent être envisagées. Le type de manipulation à laquelle on soumet cet objet permet de préciser la grandeur dont il s’agit, ce qui conduit à un vocabulaire approprié :
> - pour une feuille de papier : la longueur de son bord, ou périmètre, et l’aire de sa surface ; on suit le bord du bout du doigt, on balaie la surface de la paume de la main ;
> - pour une portion de route, sa longueur s’il s’agit de la parcourir, son aire s’il s’agit de la goudronner, [...] sa pente s’il s’agit d’y faire passer de lourds convois [...]. ».

L’abord de la notion de grandeur à partir du langage ordinaire recèle quelques ambiguïtés comme l’illustrent les deux exemples suivants, tirés de la même brochure.

> « “Ce récipient est plus grand que cet autre” : s’agit-il de sa hauteur, de sa plus grande dimension horizontale, de son volume intérieur ou capacité, de son volume extérieur ?
> “La planète Saturne est grosse comme 95 Terres” : s’agit-il de volumes, de diamètres, de masses ? ».

Dans ce dernier cas, des données supplémentaires permettent de trancher :

> “ Le diamètre équatorial de Saturne, anneaux exclus, est 9,4 fois celui de la Terre : son volume est 745 fois celui de la Terre (et non $9,4^3$ car elle est sensiblement plus aplatie que la Terre). Sa masse est 95 fois celle de la Terre.”. Les mots “grosse comme” signifiaient donc : “lourde comme”.

Nombreuses sont les références proposant une théorie des grandeurs[3]. Pour préciser la notion d’espèce de grandeurs, on suppose connu un ensemble X d’***objets*** et une relation d’équivalence ~ sur X qui définit une certaine *espèce* de grandeurs (volume, longueur, etc.) : deux objets x_1, x_2 appartenant à X qui sont équivalents seront dits avoir *même grandeur* (Il existe en général plusieurs relations d’équivalence intéressantes définissant autant d’espèces de grandeurs différentes). Pour des raisons qui s’éclairciront plus tard, on supposera que chaque classe d’équivalence est *infinie*.

On suppose d’abord qu’on a défini sur X, ensemble des objets, une relation de *préordre total* $\prec$ associée à ~, c’est-à-dire telle que, pour tous x, y, z :

- un et un seul des énoncés $x \prec y$, $y \prec x$, $x \sim y$ est vrai ;
- si $x \prec y$ et $y \prec z$ alors $x \prec z$.

En d’autres termes, on suppose qu’on peut dire que deux objets ont même grandeur ou non, et, dans ce dernier cas, on peut comparer ces deux objets.

> Illustrons ce qui précède à l’aide de la grandeur « longueur ». Les problèmes posés à l’école primaire peuvent donner lieu à :
> – des comparaisons directes : juxtaposition, superposition ;
> – des comparaisons indirectes : recours à un objet intermédiaire (longueur servant de gabarit) ;
> – transformation de l’un des objets pour le rendre comparable à l’autre (par exemple, déroulement d’une ligne non rectiligne).
> Au cycle 3, le document d’application précise que “le compas doit être un instrument privilégié pour comparer ou reporter des longueurs, chaque fois qu’un mesurage n’est pas indispensable”.
> On peut mathématiser (pour le professeur de collège) ce qui a été construit à l’école à l’aide de la théorie précédente, en faisant les choix suivants :
> Objets : segments de droite.
> Relation d’équivalence : congruence des segments[4].
> Classes d’équivalence : ce sont les longueurs. Des segments congruents ont même longueur.
> Les classes d’équivalence sont suffisamment “riches” : quelle que soit la droite d, et quel que soit le point O sur cette droite, de chaque côté du point O on peut reporter un segment unique de longueur donnée.

---

[2] Voir [2] en bibliographie. Cette brochure a largement été exploitée pour l’écriture du présent document.

[3] Voir dans la bibliographie, [3], [4], et [6], d’où la présentation qui suit est tirée.

[4] Le mot “congruence” est utilisé, par Hilbert notamment, pour éviter deux écueils : employer à sa place le mot “égalité”, comme on l’a fait longtemps après Euclide, alors que ce mot a pris plus récemment un sens nouveau (égalité de deux éléments d’un ensemble) ; employer le mot “isométrie”, qui suppose qu’on dispose déjà de la mesure des longueurs).

On suppose ensuite qu'on a défini sur X une addition, notée $\oplus$. Cette addition sur les objets n'est pas partout définie : il est en effet impossible d'ajouter un objet à lui-même[5] :

$x \oplus y$ est défini si, et seulement si, $x \neq y$;

si $x \neq y$, alors $x \oplus y \sim y \oplus x$, et si, de plus, $x \neq z$ et $y \sim z$, alors $x \oplus y \sim x \oplus z$;

si $(x \oplus y) \oplus z$ et $x \oplus (y \oplus z)$ sont définis, alors $(x \oplus y) \oplus z \sim x \oplus (y \oplus z)$.

Ces axiomes sont en effet choisis de manière à correspondre au mieux aux objets physiques et aux opérations qui les concernent, et de manière à pouvoir définir l'addition des grandeurs associées, c'est-à-dire des classes d'équivalence. On suppose enfin que sont satisfaites trois conditions unissant $\sim$, $\prec$ et $\oplus$:

- si $x \neq y$, alors $x \prec x \oplus y$;
- si $x \prec z$, alors il existe y tel que $x \oplus y \sim z$;
- pour tout x et tout entier $n \in \mathrm{N}^*$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $y_1 \sim \ldots \sim y_n$, $y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$ est défini et $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$. (On comprend ici pourquoi on a supposé que chaque classe d'équivalence est infinie).

On désigne par G (comme grandeur) l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$ dans X, noté $X/\sim$. Dans la suite, la classe de x est notée $\tilde{x}$. À partir de la structure $(X, \sim, \prec, \oplus)$ ainsi supposée, on définit alors sur G :

- un *ordre total* : $\tilde{x} < \tilde{y}$ s'il existe $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$ tel que $x' \prec y'$.
- une *addition* : $\tilde{x} + \tilde{y}$ est l'ensemble des z tels que $z \sim x' \oplus y'$, où $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$.

On définit la *multiplication* par un entier n à l'aide de l'addition itérée.

- une *soustraction* : $\tilde{x} - \tilde{y}$ est l'unique élément de G qui, ajouté à $\tilde{y}$ donne $\tilde{x}$.
- une *division* par $n \in \mathbf{N}^*$: le quotient de $\tilde{x}$ par n est $\tilde{y}$ où y est tel que :

  $y \sim y_1 \sim \ldots \sim y_n$, avec $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$.

Pour tout $g \in G$, on pose en outre $1g = g$. On a alors le résultat suivant : pour tous g, g_1, g_2, g_3 appartenant à G,

- Un et un seul des énoncés $g_1 < g_2$, $g_1 = g_2$, $g_1 > g_2$ est vrai ; (1)
- Si $g_1 < g_2$ et $g_2 < g_3$ alors $g_1 < g_3$; (2)
- $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$; (3)
- $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$; (4)
- $g_1 < g_1 + g_2$; (5)
- Si $g_1 < g_2$ alors il existe un élément h de G et un seul tel que : $g_1 + h = g_2$; (6)
- Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un élément h de G et un seul tel que $g = nh$. (7)

[5] Pour la grandeur « longueur » par exemple, on ne peut pas mettre bout à bout un segment avec lui-même ; il faut disposer pour cela d'un autre segment de même longueur.

On obtient ainsi une axiomatique de la notion d'espèce de grandeurs (G, <, +)[6].

Illustrons ce qui précède avec la grandeur « longueur ”.

Comparaison :

Elle se fait à l'aide de segments qui les représentent. Une longueur a est inférieure à une longueur b si leurs représentants [OA] et [OB] sur une même demi-droite d'origine O sont tels que $A \in [OB]$.

Addition :

La somme des longueurs des segments [AB] et [CD] est celle du segment obtenu en mettant “bout à bout” deux segments respectivement équivalents à [AB] et [CD]. Autrement dit, si [AB] est un segment de longueur a et [BC] le segment de longueur b porté par la demi-droite d'origine B ne contenant pas le point A, alors $a + b$ est la longueur du segment [AC].

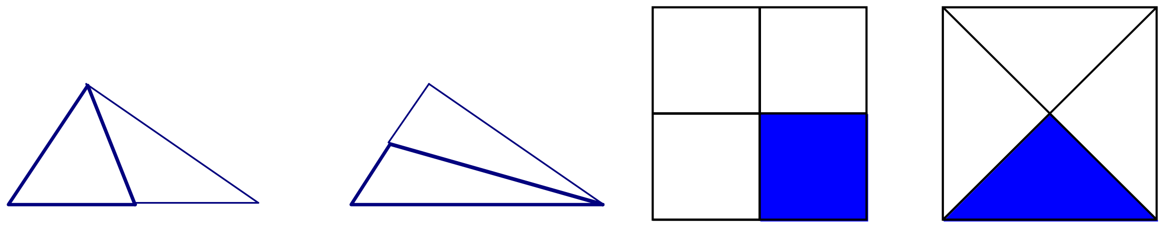
Dans cette théorie des longueurs, ces propriétés sont des axiomes, traduisant les propriétés utilisées en géométrie instrumentée à l'école.

Une fois définie l'addition des longueurs, on peut définir la multiplication des longueurs par un entier (addition itérée), le produit de la longueur a par l'entier naturel n étant noté $n\,a$.

Le problème de la division d'une longueur par un entier non nul est également abordé à l'école primaire par l'emploi du réseau de parallèles équidistantes (ou guide-âne).

Du point de vue axiomatique, cela revient à admettre que la grandeur “longueur” est divisible, c'est-à-dire que, quelle que soit la longueur a, et quel que soit l'entier naturel n non nul, il existe une longueur b et une seule telle que $n\,a = b$ (Propriété (7) ci-dessus).

On ne peut pas parler de *la* moitié d'un objet x, tout simplement parce que, en dehors d'une convention sociale, l'“ objet moitié ” d'un objet x n'existe pas : il existe en effet une infinité de couples d'objets distincts (y_i,y_j) tels que $y_i \sim y_j$ et $y_i \oplus y_j \sim x$. Les figures ci-dessous[7] illustrent ainsi la non-existence d'une “ moitié de triangle ” et d'un “ quart de carré ” du point de vue de l'aire (on notera que les périmètres de ces “ moitiés ”, d'une part, de ces “ quarts ”, d'autre part, sont inégaux).



Il n'est donc pas possible d'opérer directement sur les objets, et le recours aux grandeurs est nécessaire pour pouvoir définir les opérations qu'on ne peut pas faire sur les objets. Il convient donc d'assumer le détour par les grandeurs dans le trajet qui conduit des objets aux mesures. Si des expressions telles que “ fraction de tarte”, “fraction d'un champ” n'ont guère de signification, les choses s'éclairent si au lieu de parler de fraction d'objets, on parle de fraction de grandeurs attachées à ces objets : fraction de la masse (ou du volume) d'une tarte, fraction de l'aire d'un champ … Ce passage des objets aux grandeurs ne peut être laissé à la charge des élèves.

À propos de la mesure des grandeurs, l'un des problèmes de l'enseignement des mathématiques est la construction d'un système de nombres N vérifiant la condition suivante. Si $(X, \sim, \prec, \oplus)$ est le support d'une certaine espèce de grandeurs G, alors il existe, à un facteur multiplicatif près, une application unique $\mu : X \to \mathrm{N}$ telle que :

- la relation d'équivalence définie par μ sur X est identique à $\sim$: $\mu(x) = \mu(y) \Leftrightarrow x \sim y$;
- la relation de préordre définie par μ sur X est identique à $\prec$: $\mu(x) < \mu(y) \Leftrightarrow x \prec y$;

[6] On retouche cette axiomatique afin d'introduire la grandeur nulle, 0_G, qui vérifie : pour tout g différent de 0_G, $0_G < g$ et $0_G + g = g$.

[7] Tirées de [6].

- par l'application μ l'image d'une somme est la somme des images : $\mu(x \oplus y) = \mu(x) + \mu(y)$.

Pour les longueurs, si on choisit une longueur u comme unité, on pose $\mu_u(u) = 1$. De quels nombres a-t-on besoin pour mesurer les longueurs ? Soit $g = nu$. Alors $\mu_u(g) = \mu_u(nu) = n$. Donc l'ensemble N contient l'ensemble **N** des entiers naturels. Soit g tel que $ng = u$ (g est une fraction de l'unité de longueur). Alors $n\, \mu_u(g) = 1$. Donc $\mu_u(g)$ est un nombre r tel que $n\, r = 1$. Ainsi s'introduisent les "fractions du nombre 1". Plus généralement, si $v = m\, u$ et $n\, g = v$, on a besoin pour mesurer g d'un nombre r tel que $n\, r = m$. Ainsi s'introduisent les fractions d'entiers, et en particulier les nombres décimaux. Par exemple, si $7\, l$ est égale à 12 cm, la mesure de l en centimètre est le nombre r tel que $7\, r = 12$.

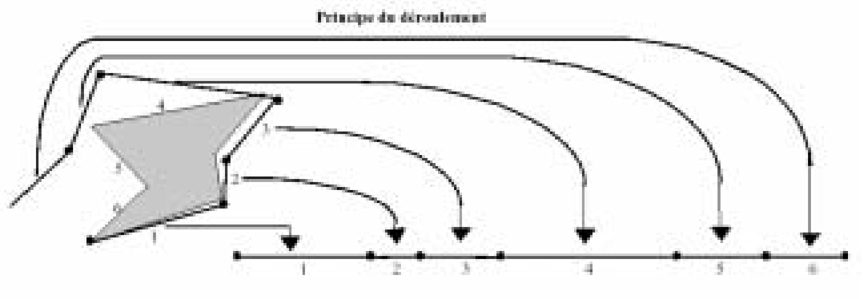
Ainsi, on peut utiliser le problème de la mesure des longueurs pour revenir sur les fractions vues à l'école et pour introduire la notion de quotient d'un entier p par un entier q. Ce contexte est un moyen pour justifier l'existence et l'unicité d'un tel nombre, qui sont admises implicitement à ce niveau de l'enseignement[8].

3. Les grandeurs fondamentales

3.1 Longueurs

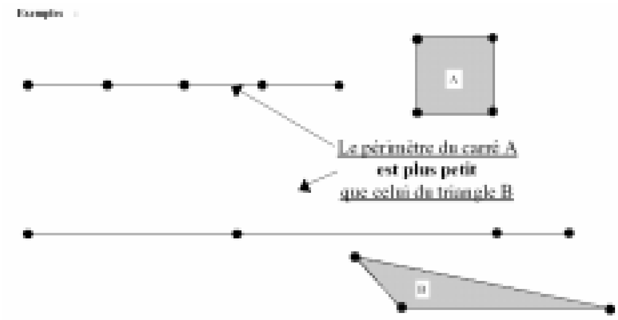
L'essentiel de la construction de la grandeur « longueur » a été traité dans le 2., en tant qu'exemple illustrant la théorie des grandeurs. Quelques remarques s'imposent au sujet des longueurs.

- L'addition des longueurs n'est pas évoquée en tant que telle dans les programmes de l'école. Néanmoins, le "déroulement" d'un polygone, qui constitue un bon moyen pour expliquer la notion de périmètre, la convoque implicitement[9].



[8] On peut certes construire les nombres indépendamment des grandeurs : une telle théorie a été faite à la fin du XIX^e pour assurer un meilleur fondement de l'analyse, un fondement indépendant de la géométrie dont la fragilité des fondements euclidiens venait d'être mise en évidence lors de la découverte des géométries non euclidiennes. Mais depuis 1985, les programmes ont abandonné la reproduction de cette genèse dans l'enseignement, du type de celle qui avait été proposée dans la période des mathématiques modernes. On adopte un point de vue dans lequel on suppose qu'existent les nombres dont on a besoin pour mesurer les grandeurs géométriques usuelles. Il y a alors dépendance génétique des nombres par rapport aux grandeurs, et les grandeurs (notamment les longueurs) peuvent être utilisées pour construire de nouveaux nombres et les opérations les concernant. D'ailleurs, des théories mathématiques récentes (Whitney – 1968, voir [8] en bibliographie) construisent les grandeurs et les nombres dans un même cadre axiomatique.

[9] Les schémas ci-dessous sont tirés du document *Aire et périmètre,* disponible sur le site du ministère à la rubrique "Dispositifs relais".



- La mesure d'une longueur avec une unité de longueur donnée suppose connues toutes les opérations sur les longueurs, qu'elle met en œuvre en particulier sur l'unité choisie (unité qui est elle-même une longueur). On peut alors, mais alors seulement, relier les opérations sur les mesures ainsi obtenues aux opérations correspondantes sur les longueurs.
- Ces opérations sur les longueurs sont également fondamentales pour la construction de la notion de demi-droite graduée. Considérons une telle demi-droite [O*x*) sur laquelle on choisit une unité de longueur *u*, matérialisée par le segment [OI], I désignant le point "unité". La longueur du segment [OI] est l'unité de longueur *u*, ou encore 1 *u*. Placer le nombre décimal 2,4 sur cette demi-droite consiste à y produire le point A tel que le segment [OA] ait pour longueur 2,4 *u*, ce que l'on fait en plaçant "bout à bout" le segment [OA'] de longueur 2 *u* et le segment [A'A] de longueur $\frac{4}{10}u$. Ensuite, on écrit sous l'extrémité A du segment ainsi obtenu le nombre décimal 2,4, qui n'est autre que le rapport (la "raison") de la longueur du segment [OA] à la longueur du segment [OI]. C'est la force du travail de Descartes que d'avoir exploité le fait que l'on pouvait remplacer les "raisons" de deux grandeurs quelconques de même espèce par les rapports de longueurs, ce qu'il fait en fixant arbitrairement une unité : ainsi, tout nombre x peut être représenté par le rapport d'une longueur $x\,u$ à la grandeur u, égal à $\frac{x}{1}$, c'est-à-dire x. Chaque longueur l étant représentée par un segment [OM] d'origine O, est donc caractérisée par l'extrémité M de ce segment, que l'on matérialise en coupant la demi-droite [O*x*) par un trait (origine du mot "abscisse"). On écrit enfin l'abscisse x de ce point. Nombreux sont les élèves qui répugnent à associer un nombre non nul à un point[10], ce dernier étant pour eux "sans dimension". Maîtriser le lien entre un point et son abscisse sur une demi-droite graduée ne peut se faire sans avoir compris qu'elle est la mesure de ce segment en prenant comme unité la longueur du segment [OI], c'est-à-dire le rapport de deux longueurs : celle de [OM] à celle de [OI].
- Le fait qu'il n'existe aucune unité "naturelle" de longueur constitue la faiblesse de construction cartésienne. Pour contourner cette difficulté, les opérations sur les longueurs définies précédemment permettent de travailler directement avec des longueurs, (plutôt qu'avec leurs seules mesures) comme le suggèrent les exemples suivants :
  - Le périmètre d'un carré dont le côté a pour longueur 5 cm est 4 × (5 cm), c'est-à-dire 4 × 5 cm, soit 20 cm.
  - Le périmètre d'un rectangle de longueur 12 cm et de largeur 5 cm est égal à : 12 cm + 5 cm + 12 cm + 5 cm , ou encore 2 × (12 cm + 5 cm), c'est-à-dire 2 × 17 cm, soit 34 cm. Ceci revient à interpréter les formules $P = 4 \times c$; $P = 2 \times (L + l)$ comme des formules portant sur des longueurs et pas

[10]Vergnaud G, 1988, Question de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 1, ULP Strasbourg.

seulement sur des mesures de longueur, des formules qui sont vraies *quelle que soit l'unité de longueur choisie*.

- Lorsqu'on partage un segment de longueur 12 cm en 7 parties de même longueur, chacun des segments a pour longueur $\frac{12}{7}$ cm, et $7 \times \left(\frac{12}{7}\ \text{cm}\right) = 12$ cm.

- Les distances sont des mesures de longueur, ce qui suppose le choix d'une unité de longueur. Ce dernier est souvent fait implicitement, ce qui masque le caractère nécessaire d'un tel choix. On peut l'objectiver en précisant cette unité, ou en utilisant une lettre (u, par exemple) pour la désigner.

- La question de la longueur du cercle fait appel à la notion de longueur d'une courbe, que l'on définit comme limite des (mesures des) longueurs des lignes polygonales inscrites dans la courbe lorsque le pas de ces lignes tend vers 0, et sort donc du cadre théorique précédent. Cependant, la formule relative à la longueur (ou périmètre) d'un cercle $P = 2 \times \pi \times R$ peut être utilisée comme dans les exemples précédents, en tant que relation entre deux longueurs. Ainsi, la longueur d'un cercle de rayon 6 cm est égal) $2 \times \pi \times 6$ cm, soit $12 \times \pi$ cm. Le périmètre de l'hexagone régulier inscrit est égal à $6 \times R$ et celui du cercle est un peu plus grand : $2 \times \pi \times R$. Ce fait peut être mobilisé pour faciliter la mémorisation de la formule.

3.2. Les angles

3.2.1 Les angles en tant que grandeur

À l'école primaire, le premier contact avec les angles se fait à travers les figures de base (quadrilatères usuels, polygones, puis triangles). L'angle droit apparaît ainsi avant que la notion d'angle soit définie : dans un carré, dans un rectangle, tous les angles sont superposables, et on dit que les angles en question sont des angles droits. La notion d'angle est travaillée sur les types de tâches suivants[11] :

Compétences	**Commentaires**
– Comparer des angles dessinés par superposition ou en utilisant un gabarit. **– Comparer des angles situés dans une figure (angles intérieurs d'un triangle, d'un quadrilatère...).**	Les activités de classement et de rangement des angles précèdent les activités de mesurage en degrés, qui relèvent du collège. Les élèves doivent, en particulier, prendre conscience du fait que les longueurs des côtés n'ont aucune incidence sur le résultat de la comparaison des angles.
– Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit ou par report d'un étalon.	L'usage du rapporteur gradué classique ne relève pas du cycle 3. On peut, par exemple, faire utiliser le gabarit d'un angle du triangle équilatéral pour vérifier l'égalité des trois angles de ce triangle ou encore pour faire remarquer que sa moitié est égale au tiers de l'angle droit.
– Tracer un angle droit, ainsi qu'un angle égal à la moitié, le quart ou le tiers d'un angle droit.	Un pliage soigneux d'un angle droit en 2, 4 ou 3 angles égaux permet d'obtenir les angles ci-contre. Les activités correspondant à cette compétence reposent sur le pliage et permettent de renforcer le sens donné aux fractions utilisées : on peut, par exemple, tracer un angle correspondant à $\frac{5}{4}$ d'angle droit par pliage et report. Il n'est pas nécessaire, pour cela, de savoir qu'un angle droit est égal à 90°.

[11] Voir le document d'application du cycle 3, page 39.

Pour l'information du professeur de collège, on peut mathématiser ce qui a été fait à l'école primaire de la manière suivante. On y cultive à la fois les angles de secteurs (saillants ou rentrants) et les angles de paires de demi-droites de même origine. Pour des raisons de clarté, ces deux notions sont ici distinguées.

3.2.2 Angles de secteurs

Objets : secteurs angulaires saillants ou rentrants définis par deux demi-droites [OA) et [OB) de même origine.

• Dans le cas où O, A et B ne sont pas alignés, le secteur saillant limité par les deux demi-droites [OA) et [OB) est, par définition, l'intersection du demi-plan (fermé) de frontière (OA) contenant [OB) et du demi-plan (fermé) de frontière (OB) contenant [OA), alors que le secteur rentrant est la réunion du demi-plan de frontière (OA) ne contenant pas [OB) et du demi-plan de frontière (OB) ne contenant pas [OA).

• Dans le cas où O, A et B sont alignés, on ne peut étendre sans difficulté la définition précédente.

- Dans le cas où [OA) et [OB) sont confondues, par définition le secteur saillant limité par les deux demi-droites [OA) et [OB) est la demi-droite [OA), le secteur rentrant étant le plan tout entier.
- Dans le cas où [OA) et [OB) sont opposées, elles déterminent deux demi-plans de frontière (OA) : chacun d'eux est, par définition, un secteur angulaire. Un tel secteur est appelé secteur plat.

Relation d'équivalence : congruence des secteurs, traduction mathématique de la superposabilité.
Classes d'équivalence : ce sont les angles de secteurs. Des secteurs congruents sont dits de même angle.
En particulier, les secteurs plats sont de même angle, l'angle plat ; les secteurs réduits à une demi-droite sont de même angle, l'angle nul ; les secteurs égaux au plan tout entier sont de même angle, l'angle plein.
Par abréviation, un angle de secteurs saillants (resp. rentrants) est appelé « angle saillant » (resp. « angle rentrant »).
On notera que la difficulté pour définir les secteurs (ou angles) plats et nuls se retrouve sur le plan de l'apprentissage : deux demi-droites formant un tel angle au sens mathématique n'en forment pas au sens commun.

Notation :
Les notations des angles saillants et rentrants (avec les "chapeaux") sont usuelles en France. On peut les éviter en écrivant "saillant AOB (ou *x*O*y*)", "rentrant AOB (ou *x*O*y*)".

Codage :
Les codages usuels utilisant des arcs de cercle permettent de distinguer un secteur saillant du secteur rentrant associé.
Comparaison :
À l'aide de représentants de ceux-ci. Un angle de secteur est inférieur ou égal à un autre s'il existe un secteur représentant le premier qui est inclus (au sens large) dans un secteur représentant le second.
L'angle nul est le plus petit des angles, alors que l'angle plein est le plus grand.

Addition :
La somme de deux angles de secteurs n'existe que dans le cas où il existe deux secteurs représentant ces angles qui soient des secteurs adjacents. Dans ce cas, la réunion des deux secteurs adjacents est un secteur qui représente un angle, appelé « somme des deux angles ».
L'addition des angles de secteurs repose sur la définition des secteurs adjacents : deux secteurs sont adjacents s'ils ont un (éventuellement deux) côté(s) commun(s) et s'ils n'ont aucun point commun en dehors de ce(s) côté(s).

Bissectrice d'un secteur. Moitié d'un angle :
Un secteur *x*O*y* (saillant ou rentrant) étant donné, il existe une demi-droite et une seule Oz d'origine O qui soit incluse dans ce secteur et telle que les angles *x*Oz et *y*Oz soient égaux. Elle est appelée « bissectrice » du secteur (et parfois « bissectrice de l'angle *x*O*y* »). Chacun des angles *x*Oz et *y*Oz est la moitié de l'angle *x*O*y*.

Angle droit, angle aigu, angle obtus :
En bissectant un secteur plat, on obtient deux secteurs (appelés « quadrants »), et l'angle associé aux quadrants est appelé « angle droit ».
Un angle de secteurs plus petit que l'angle droit est appelé « angle aigu ». Un angle saillant plus grand que l'angle droit est appelé « angle obtus ».

Les angles de secteurs rentrants sont utiles dans les représentations de données (diagrammes circulaires) ainsi que dans la description de certains polygones. Souvent cependant, on souhaite travailler avec une notion d'angle plus économique, suffisante pour traiter la géométrie du triangle.

3.2.3 Angles de paires de demi-droites de même origine

Objets : paires (éventuellement singletons) de deux demi-droites de même origine.

Relation d'équivalence : deux paires de telles demi-droites sont équivalentes si les secteurs saillants ou plats qu'elles déterminent sont superposables, ce qui équivaut à dire que ces paires de demi-droites sont elles-mêmes superposables.

Classes d'équivalence : ce sont les angles de paires de demi-droites de même origine, plus couramment appelés angles de deux demi-droites de même origine.

Notation :
L'angle de la paire de demi-droite {O*x*, O*y*} est encore noté *x*O*y* avec un chapeau d'angle saillant. Cette notation est justifiée par le fait qu'il existe une bijection entre l'ensemble des angles de paires de demi-droites de même origine et l'ensemble des angles de secteurs saillants ou plats déterminés par de telles demi-droites.

La *comparaison* se définit comme précédemment, les secteurs évoqués étant alors seulement saillants ou plats.

Pour l'*addition*, elle repose encore sur la notion de secteurs adjacents. La somme de deux angles n'est définie que si la réunion des deux secteurs adjacents est un secteur saillant ou plat. Dans ce cas, l'angle de paire de demi-droites associé à ce secteur est, appelé « somme des deux angles ».

Bissectrice d'une paire de demi-droites de même origine :
[Ox) et [Oy) étant deux demi-droites de même origine, la bissectrice [Oz) du secteur saillant xOy et la bissectrice [Oz') du secteur rentrant xOy sont portées par la même droite, que l'on appelle « bissectrice de la paire de demi-droites », ou « bissectrice des demi-droites [Ox) et [Oy) ».

Angle droit, angle aigu, angle obtus :
Les qualificatifs « droit », « aigu » et « obtus » sont utilisés aussi bien pour les angles de secteurs que pour les angles de paires de demi-droites de même origine.
Dans les théories précédemment esquissées, les propriétés ci-dessus sont des axiomes ou des définitions, traduisant les propriétés utilisées en géométrie instrumentée.

Remarque : l'addition des angles n'est pas évoquée en tant que telle dans les programmes de l'école, et l'angle droit n'est pas défini comme moitié de l'angle plat.

3.2.4 La mesure des angles

• En se bornant aux cas simples des angles de secteurs (ou angles de paires de demi-droites de même origine, qui se ramènent aux angles de secteurs saillants), le problème de la mesure des angles prend une tournure plus simple que celui de la mesure des longueurs, du fait que pour les angles, on dispose d'une unité naturelle : l'angle plein pour les angles de secteurs. Cette unité est usuellement appelée « tour » (noté tr).
Ainsi, l'angle plein est égal à 1 tr. L'angle plat est donc égal à 1/2 tr, l'angle droit à 1/4 tr. La moitié de l'angle droit est un angle égal à 1/8 tr, le tiers de l'angle droit est égal à 1/12 tr.
Des raisons historiques différentes (Mésopotamiens, Révolution française) sont à l'origine de choix différents d'unités, faciles à relier avec le tour. Il en est de même de l'angle droit (D) qui est parfois utilisé.
Le degré (°) est tel que : 1 tr = 360°. Le grade (gr) est tel que 1 D = 100 gr (et donc 1 tr = 400 gr).
Il en résulte que :
Angle plein = 1 tr = 360° = 4 D = 400 gr.
Angle plat = 1/2 tr = 180° = 2D = 200 gr
Angle droit = 1/4 tr = 90°= 1D = 100 gr.
On en déduit : 1° = 1/360 tr = 10/9 gr et 1 gr = 1/400 tr = 0,9°, résultats qui permettent de faire toutes les conversions sans avoir besoin de recourir à un tableau. Par exemple :
3/8 tr = 3/8 (360°) = 3 × 45° = 135°
73° = 73 (10/9 gr) = 730/9 gr ≈ 81,1 gr[12].

• Les angles sont souvent considérés comme des nombres (grandeur sans dimension), la justification s'appuyant sur la relation $l = R\theta$, dans laquelle l désigne la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre θ sur un cercle de rayon R : θ est le rapport de deux longueurs, donc c'est un nombre. Pour expliquer le manque de pertinence de cette justification, un détour par le radian s'impose.
Pour mesurer un angle (et pas seulement les angles étudiés au collège), on peut penser à mesurer l'arc qu'un angle au centre intercepte sur un cercle. Puisqu'elle dépend de la longueur R du rayon, il est judicieux de choisir une unité de longueur u proportionnelle à R.
Si on prend $u = 2\pi R$, on retrouve le tour. En effet : 1 u = angle plein = 1 tr. On retrouve le degré en prenant $u = \pi/180\ R$, le grade en prenant $u = \pi/200\ R$.

[12] Dans les programmes du collège, l'utilisation d'une unité autre que le degré (décimal) n'est pas exigible.

Le choix le plus simple est de prendre $u = R$. Alors 1 tr = $2\pi\ u$. u est alors appelé « radian » (noté rad). Il en résulte : 1 tr = 2π rad, angle plat = π rad, 1 D = $\pi/2$ rad, et les conversions peuvent se traiter comme précédemment, sans devoir recourir à un tableau[13].
Revenons sur l'égalité $l = R\theta$. θ y désigne en fait la mesure en radian de l'angle au centre interceptant l'arc de longueur l sur un cercle de rayon R. Si on désigne par α cet angle, alors $\alpha = \theta$ rad. Et si on veut écrire une égalité liant l, R, et l'angle α, on est conduit à écrire :

- soit une égalité de deux nombres, rapports de deux grandeurs de même espèce (longueur, et angle) : $\dfrac{l}{R} = \dfrac{\alpha}{1\ \text{rad}}$
- soit une égalité d'angles : $\alpha = \dfrac{l}{R}\ \text{rad}$.

La confusion, fréquente en analyse, entre un angle α et sa mesure en radian, ici $\dfrac{l}{R}$, conduit à faire comme si le radian était le nombre 1. Cette confusion ne prête guère à conséquence chez un utilisateur averti. Mais elle ne saurait justifier l'argumentation présentée au début du paragraphe, puisqu'elle admet dès le départ ce qu'elle voudrait établir (un angle est sans dimension).

Remarque :
En trigonométrie, au collège, on parle du cosinus (du sinus, de la tangente) d'un angle aigu, par exemple cos (55°), qui est égal à $\cos\left(\dfrac{11\pi}{36}\text{rad}\right)$. Ainsi, cos ($x$°) = $\cos\left(\dfrac{\pi}{180}x\ \text{rad}\right)$. Si on veut définir une fonction qui à un nombre associe le cosinus d'un angle, se pose la question du choix de l'unité. En effet, les deux fonctions : $x \mapsto \cos(x°)$ et $x \mapsto \cos(x\ \text{rad})$ ne sont pas les mêmes. u désignant une unité d'angle, notons $\cos_u$ et $\sin_u$ les fonctions définies par $\cos_u(x)$ = cos (x u) et $\sin_u(x)$ = sin(x u), sur un intervalle convenable de **R**, dépendant de u. Le choix de u est dicté par un résultat d'analyse. On démontre que la seule unité pour laquelle on a : $\sin_u' = \cos_u$ (et $\cos_u' = -\sin_u$) est u = rad. En revanche, on a : $\sin_{\text{o}}' = \dfrac{\pi}{180}\cos_{\text{o}}$. En faisant le choix du radian, on a donc $\cos_{\text{rad}}(x)$ = cos (x rad) et $\sin_{\text{rad}}(x)$ = sin (x rad). Or la notation usuelle de $\cos_{\text{rad}}$ est cos, celle de $\sin_{\text{rad}}$ est sin. On est donc conduit à écrire, pour tout nombre x appartenant à $[0, \pi/2]$, cos x = cos (x rad), sin x = sin (x rad), notations qui incitent à remplacer rad par le nombre 1, comme on l'a évoqué plus haut.

3.3. Les aires

Comme le rappelle le document d'accompagnement des programmes de mathématiques à l'école primaire (pages 83 et 84) :

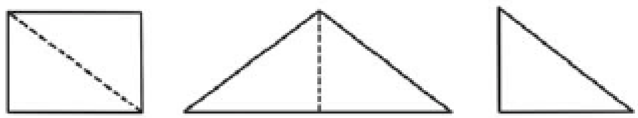
> Les aires sont essentiellement étudiées au cycle 3. La progression, qui se poursuit au collège, suit la même dynamique que celle utilisée pour les longueurs : d'abord des travaux de comparaison, puis un passage à la mesure par le choix d'un étalon, suivi d'une familiarisation avec certaines unités du système international.
> Un premier temps doit être consacré à des activités de comparaison d'aires. Il s'agit de comparer des surfaces planes selon leur étendue. Ces surfaces peuvent être soit dessinées sur une feuille de papier uni, avec la possibilité de les découper, soit matérialisées par des objets peu épais (pièces de

[13] Dans certaines spécialités, on utilise une unité appelée « millième ». Le « millième vrai » n'est autre que le millième de radian : ainsi 1 tr est égal à 2000π «millièmes vrais », soit environ 6283 millièmes vrais. Le « millième ordinaire » en est une valeur approchée par défaut, égale à 1/6400 tr ; cette unité non légale, égale à 0,05625° ou 0,625 gr, est utilisée pour la graduation des appareils de pointage et d'observation. On définit parfois le millième comme l'angle sous lequel un objet vertical de 1 m est vu à 1000 m de distance.

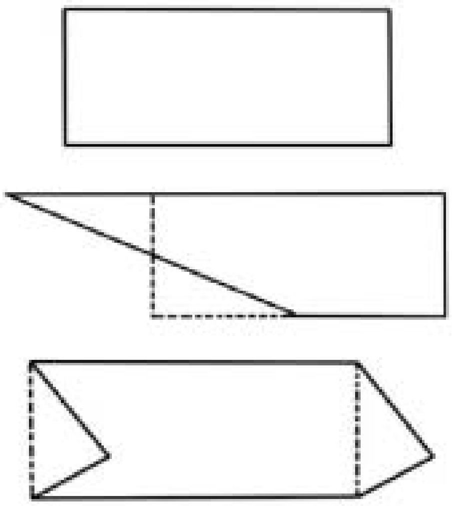
> Tangram, par exemple). Il s'agit :
> – des surfaces d'aires très différentes ; la superposition (mentale ou effective) permet de constater que « l'une est beaucoup plus étendue que l'autre » ;
> – des surfaces d'aires égales, l'égalité pouvant être vérifiée par superposition directe ;
> – des surfaces d'aires égales, mais qui ne sont pas superposables directement : des découpages et des réagencements (effectifs ou mentaux) sont alors nécessaires pour constater l'égalité des aires.
> […]
> La variété des procédures qui permettent de comparer des surfaces « quant à leur étendue » aide la construction chez l'élève de la relation « avoir même aire ».

Le même document précise par ailleurs[14] :

> Les comparaisons amènent à pointer des rapports de grandeurs : il faut savoir que les élèves ont accès à la compréhension des relations entre grandeurs (égalités, inégalités, rapports simples) avant d'être capables de mesurer ces grandeurs. Ainsi il leur est facile, sans recourir à la mesure, de dessiner un crayon deux fois ou trois fois plus long qu'un autre. Il est souvent moins « évident » pour eux que l'aire de la figure A est le double de celle de la figure C ou que les figures A et B ont la même aire : une décomposition (suivant la ligne pointillée) puis une recomposition des figures permet de s'en convaincre.



D'autres exemples sont fournis de surfaces ayant même aire :



L'évocation de « découpage » et de « recollement » ou « recomposition » pourrait laisser penser qu'on se situe dans une géométrie expérimentale. Le développement qui suit, qui propose les éléments d'une théorie des aires (sans les mesures), montre qu'il n'en est rien, et que l'idée de découpage et recomposition est au cœur de la théorie que Hilbert a élaborée dans son ouvrage « Les fondements de la géométrie », dans le but de parfaire le travail d'Euclide dans « Les Eléments ».

3.3.1 Les aires sans les mesures

La théorie concerne les figures (polygones) qui peuvent s'écrire comme réunion finie de triangles, deux quelconques de ces triangles « n'empiétant pas l'un sur l'autre », c'est-à-dire n'ayant pas de point intérieur commun. On parle alors de triangles quasi-disjoints.

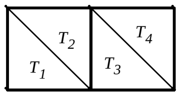
[14] Page 79.

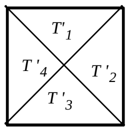
Hilbert introduit deux définitions importantes : figures équidécomposables ; figures ayant même contenance (même aire). Cette dernière correspond à ce qu'Hilbert appelle des figures équicomplémentaires.

Deux figures *P* et *P'* sont équidécomposables[15] s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre :

$$P = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n \text{ et } P' = T'_1 \cup T'_2 \cup ... \cup T'_n$$

telles que, pour chaque *i*, les triangles T_i et T'_i soient congruents[16].

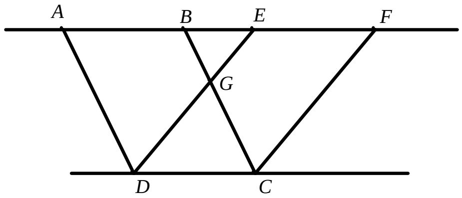




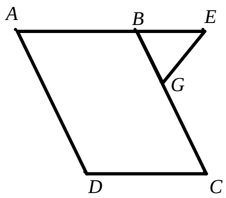
Ainsi, par exemple, la réunion de deux carrés congruents est équidécomposable avec un carré construit sur une de leurs diagonales.

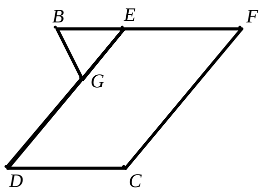
Deux figures *P* et *P'* sont équicomplémentaires[17] s'il existe des figures *Q* et *Q'* telles que :
- *P* et *Q* n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
- *P'* et *Q'* n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
- *Q* et *Q'* sont équidécomposables ;
- $P \cup Q$ et $P' \cup Q'$ sont équidécomposables.

On peut alors démontrer que « Des parallélogrammes construits sur la même base et entre les mêmes parallèles ont même contenance », à la manière d'Euclide :



ABCD et *CDEF* sont les deux parallélogrammes dont il s'agit de démontrer qu'ils ont même contenance (Proposition I-35 d'Euclide). Pour cela, on ajoute le triangle *BEG* à chacun des parallélogrammes. Il s'agit alors de démontrer que les deux figures ainsi obtenues :



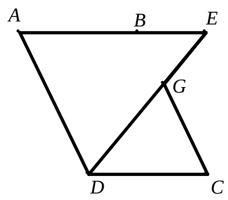


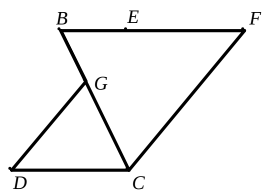
sont équidécomposables. Pour cela, on décompose chacune d'elles en deux triangles :

[15] En allemand, le mot correspondant est "zerlegungsgleich" qui signifie "égale décomposition", ou "égal découpage".

[16] L'emploi du mot "congruent" a déjà été évoqué dans la note 4. Ce mot signifie ici "superposable à un retournement près". Les "triangles congruents" renvoient aux "triangles égaux" au sens d'Euclide, et aux modernes "triangles isométriques".

[17] Dans les six premières éditions, Hilbert emploie le mot "inhaltsgleich", qui signifie littéralement "contenu égal", ou "superficie égale" ; dans les quatre éditions suivantes, il emploie "ergängzungsgleich" qui signifie "égal par complément". La définition de l'équicomplémentarité donnée ici est tirée de Hartshorne R., 2000, *Geometry : Euclid and beyond*, Springer.



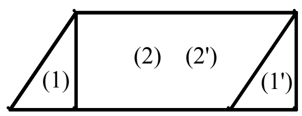


- les triangles ADE et CDG pour la première ;
- les triangles BCF et CDG pour la seconde.

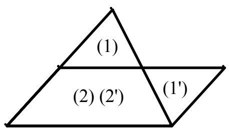
Il suffit alors de démontrer que les triangles ADE et BCF sont congruents.

Cette théorie demeure intéressante au collège. En effet, on peut calculer des aires par *la méthode de décomposition*, qui repose sur le fait que deux figures *équidécomposables* ont même aire. En notant + les réunions de figures quasi-disjointes, pour calculer l'aire d'une figure F, on la décompose sous la forme : $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, de telle manière qu'en faisant subir à chacune des F_i une isométrie[18] convenable, on obtienne n figures H_1, H_2, … H_n quasi-disjointes dont la réunion $H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ est une figure H dont on connaît déjà l'aire.

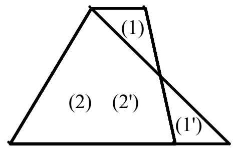
La *méthode de décomposition* permet de déduire les formules donnant l'aire du parallélogramme dans certains cas, puis celles du triangle, du trapèze, du cerf-volant ; elle permet également d'élaborer des justifications du théorème de Pythagore, qui ne sont pas les plus utilisées dans les manuels actuels. Les figures ci-dessous en donnent des illustrations.



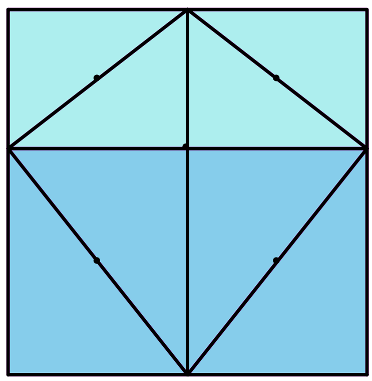
Du parallélogramme au rectangle par équidécomposition



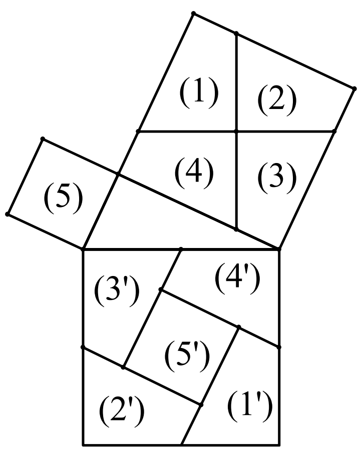
Du triangle au parallélogramme par équidécomposition



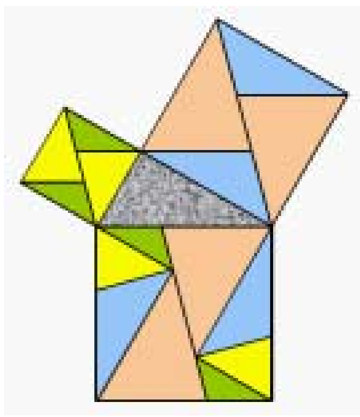
Du trapèze au triangle par équidécomposition



Du rectangle au cerf-volant par équidécomposition



Théorème de Pythagore et équidécomposition (I)

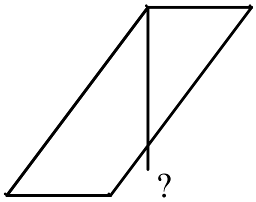


Théorème de Pythagore et équidécomposition (II)[19]

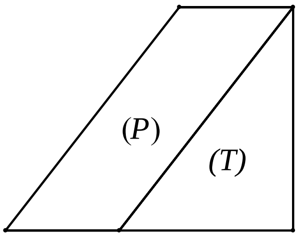
En revanche, elle échoue dans certains cas de figures pour établir la formule relative au parallélogramme (cas où ce dernier ne contient pas entièrement la hauteur considérée).

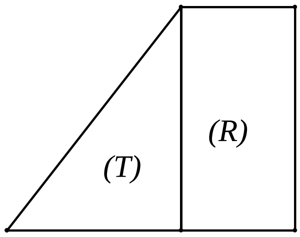
[18] On verra plus loin qu'on peut remplacer l'isométrie par une composée de symétries centrales.

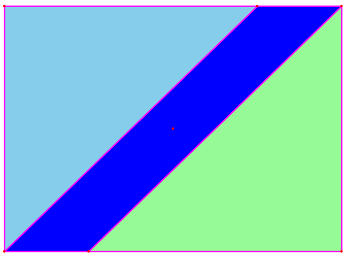
[19] Figure tirée du document Aire et périmètre, disponible sur le site du ministère à la rubrique *Dispositifs Relais*.

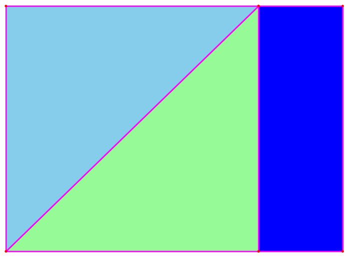


C'est alors que la *méthode de complémentation* - qui repose sur le fait que deux figures *équicomplémentaires* ont même aire - est d'une grande efficacité (elle permet de traiter tous les cas de figure) ; si la démonstration d'Euclide (esquissée plus haut) peut être considérée comme compliquée, il n'en est pas de même de celle que les figures suivantes permet d'élaborer.

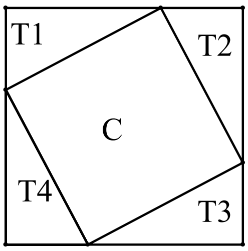


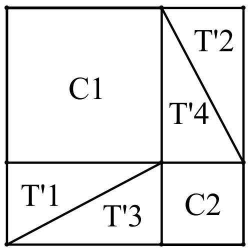






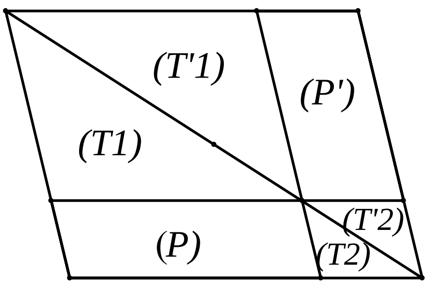
C'est encore la méthode de complémentation qui est implicitement au cœur des justifications les plus habituelles du théorème de Pythagore.



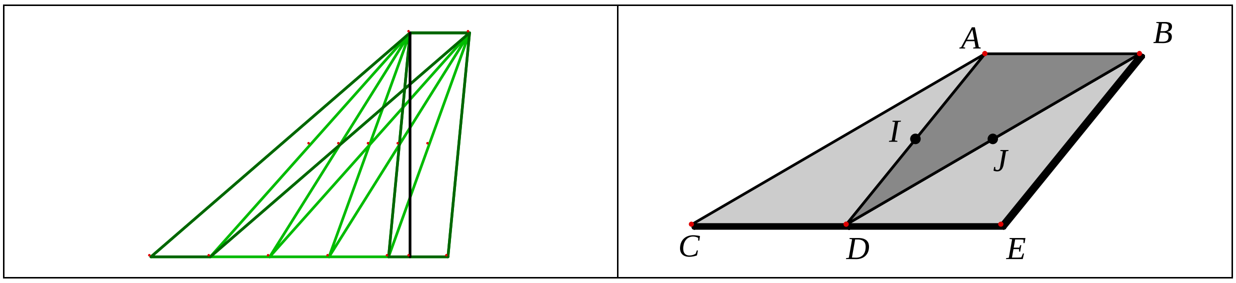


Théorème de Pythagore et équicomplémentarité

C'est également à une convocation implicite de cette méthode que l'on fait appel pour justifier l'égalité des aires des parallélogrammes (*P*) et (*P'*) dans la figure suivante de l'œuvre d'Euclide qui est devenue un classique :



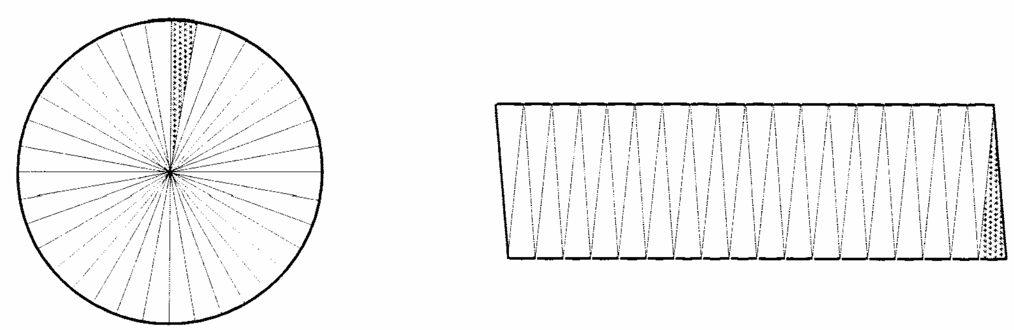
L'importance de la symétrie centrale dans la présente théorie des aires peut être illustrée par la justification de la technique dite « du redressement du parallélogramme », qui montre qu'un parallélogramme dont la hauteur « tombe en dehors de sa base » a même aire qu'un parallélogramme de même hauteur qui ne « souffre pas de ce défaut ».



Elle consiste à réitérer la construction réalisée sur la figure de droite autant de fois qu'il le faut jusqu'à ce que le parallélogramme obtenu contienne entièrement sa hauteur ; chaque étape consiste à faire subir à une moitié du parallélogramme initial (le triangle *ACD* sur la figure de droite) la composée de la symétrie centrale de centre I, suivie de la symétrie centrale de centre J. On remplace alors le parallélogramme ABDC par le parallélogramme « redressé » ABED.

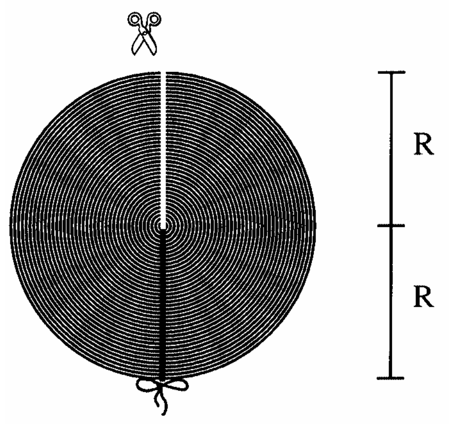
3.3.2 Les aires avec les mesures

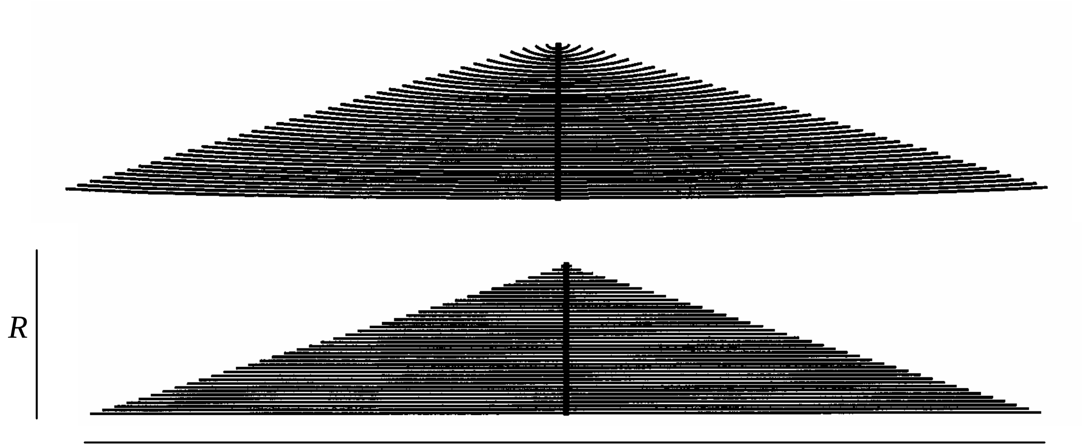
Les exposés de la théorie des aires utilisant les nombres sont mieux connus[20]. On trouvera l'un des plus simples dans l'annexe 1, dans lequel on introduit une fonction mesure pour les aires de certaines parties du plan (parties quarrables).
Cette théorie est indispensable pour établir la quarrabilité du rectangle dans le cas général, et surtout celle du disque, et établir les résultats correspondants.
Pour l'enseignement au collège de l'aire du disque, cette théorie est trop complexe. On peut justifier le résultat de plusieurs manières, si on définit le nombre π comme rapport du périmètre du disque à son diamètre :
- Partager un disque en un grand nombre (pair) de secteurs de même angle au centre, et les recomposer sous la forme d'un « parallélogramme curviligne » :



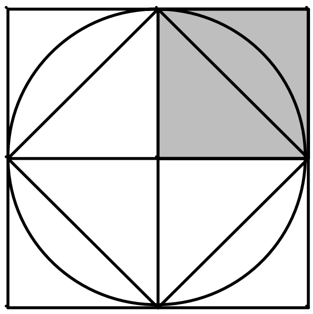
En augmentant indéfiniment le nombre de secteurs, on obtient « à la limite » un rectangle dont les côtés ont pour longueurs R et $1/2\ (\pi \times D)$ soit R et $\pi \times R$, d'où le résultat.
- Considérer un ruban de serpentin (qui a la forme d'un cylindre), et s'intéresser au disque constituant une de ses bases. Le découpage et la recomposition suivante suggère que le disque a même aire que le triangle isocèle, dont la base principale a pour longueur $2 \times \pi \times R$, et pour hauteur R. Il a une aire double de celle d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont $\pi \times R$ et R, d'où le résultat.

[20] Voir en bibliographie les ouvrages de Lebesgue, Boltianskii, et Rogalski.





$2 \times \pi \times R$



La figure ci-contre permet de mémoriser la formule donnant l'aire du disque. L'aire du carré colorié est égale à R^2. Celle du disque est inférieure à son quadruple $4\,R^2$, et supérieure à son double $2\,R^2$; elle est égale à $\pi\,R^2$.

3.3.3 Lien entre les deux théories des aires

Pour les polygones, on dispose donc de deux théories concernant la question de l'aire : celle d'Euclide-Hilbert, qui ne fait aucunement appel aux mesures des grandeurs ; celle concernant la mesure des aires à l'aide d'une fonction mesure. Quel lien peut-on établir entre les deux ? Il est fourni par le théorème de Bolyai-Gerwien[21] :

> Deux figures (polygones) *P* et *P'* sont équidécomposables si et seulement si elles ont même aire (au sens de la mesure) : $s(P) = s(P')$.

[21] Ce théorème a été démontré par le mathématicien hongrois Farkas Bolyai (en 1832) et par le mathématicien amateur P. Gerwien (en 1833). On doit à Hilbert d'avoir montré, en généralisant la notion de fonction mesure, le rôle fondamental de l'axiome d'Archimède, et le caractère non nécessaire de l'axiome des parallèles : le théorème demeure valable en géométrie hyperbolique et en géométrie elliptique. Pour une démonstration de ce théorème, voir la référence donnée dans l'annexe 2.

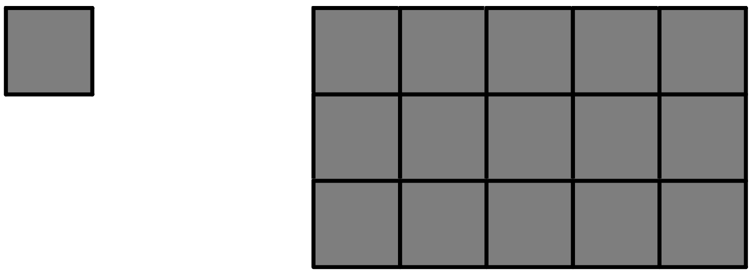
On peut affiner la notion d'équidécomposabilité, en remplaçant le groupe des isométries par un de ses sous-groupes. On obtient alors une version plus fine du théorème précédent, établie en 1951 par les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur, qui met en évidence le rôle fondamental des symétries centrales dans la théorie des aires, et permet notamment d'établir le résultat étonnant suivant : l'équidécomposabilité de deux polygones de même aire (au sens de la mesure) peut être prouvée en utilisant des décompositions telles que les pièces correspondantes aient des côtés parallèles. Ces développements sont précisés dans l'annexe 2.

3.3.4 Calcul : des longueurs aux aires

Le document d'accompagnement des programmes de mathématiques pour l'école primaire annonce (page 82) :

> Plus tard, l'élève maniera des égalités du type : […]
> – pour l'aire de rectangles,
> 4 m × 7 m = 28 m^2
> 8 m × 50 cm = 8 m × 0,50 m = 4 m^2.

Comment justifier de tels calculs ?
Si, laissant fixe l'une des longueurs des côtés, on double ou triple l'autre, l'aire est doublée ou triplée. L'aire d'un rectangle est proportionnelle à chacune de ses dimensions.
Par exemple, si on prend u comme unité de longueur, l'aire d'un rectangle de longueur 5 u et de largeur 3 u est égale à 15 fois l'aire du carré dont le côté a pour longueur l'unité u, comme le montre le découpage suivant :



Plus généralement l'aire d'un rectangle de longueur a u et de largeur b u a est donc le produit par ab de l'aire de ce carré, et ceci quelle que soit l'unité de longueur u.
On peut définir l'aire du rectangle comme produit[22] de sa longueur par sa largeur, noté $L \times l$.
Le produit de a u par b u est alors noté a u × b u. Le produit de 1 u par 1 u est noté u × u ou encore u^2. Avec ces notations, le résultat concernant l'aire du rectangle de longueur a u et de largeur b u s'écrit : a u × b u = ab u^2.
Si on prend u = cm, on obtient : 5 cm × 3 cm = 15 cm^2.
Comme on l'a vu au 3.1 pour les longueurs, la formule $A = L \times l$ est une égalité entre deux grandeurs, indépendante des unités choisies pour les exprimer :
5 cm × 3 mm = 50 mm × 3 mm = 150 mm^2,
5 cm × 3 mm = 5 cm × 0,3 cm = 1,5 cm^2,
1 cm^2 = 1 cm × 1 cm = 0,01 m × 0,01 m = 0,0001 m^2,
Ces calculs fournissent un agréable et efficace substitut aux « tableaux de conversion » pour les unités d'aire.
À partir de la classe de 4^e, on peut mettre à profit le calcul sur les puissances, dont les règles de calcul s'étendent aux calculs sur les grandeurs : 1 cm^2 = (10^{-2} m)^2 = 10^{-4} m^2 …

[22] L'extension de la définition du produit de deux grandeurs est traitée au paragraphe 5.

3.3.5 Aires et périmètres

La distinction entre ces deux grandeurs est évoquée dans les programmes du primaire (Documents d'application - Cycle 3 – page 38) : « Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire. »

Le document *Aire et périmètre* évoqué dans la note 9 fournit des activités permettant aux élèves de dissocier ces deux grandeurs, et de montrer qu'elles peuvent varier dans le même sens (ce qui est conforme à l'intuition) mais également en sens contraires (ce qui l'est moins). De même, l'activité Curvica[23] montre qu'une figure peut avoir un périmètre plus grand mais une aire plus petite qu'une autre (ou une aire plus grande et un périmètre plus petit). L'intérêt de cette activité réside dans le fait qu'on travaille uniquement sur les grandeurs, sans les mesures. Par ailleurs, les pièces du matériel « Polydron » permettent de réaliser des assemblages polygonaux avec les mêmes défis : réaliser deux figures planes telles que l'une a un périmètre plus petit mais une aire plus grande que l'autre.

3.4 Volumes

Comme dans les précédents programmes, le travail sur les volumes est une nouveauté pour les élèves de collège. Le calcul du volume d'un parallélépipède rectangle fait l'objet d'une première étude en classe de 6^{e}, dans des cas où les dimensions sont des multiples entiers de l'unité de longueur, ou de sa moitié. Le résultat est formalisé en classe de 5^{e}. Le calcul avec les grandeurs peut également être utilisé, en étendant à trois le nombre des facteurs. En effet, le fait que si on maintient deux dimensions fixes, lorsque la troisième est multipliée par un nombre le volume soit multiplié par le même nombre, permet d'étendre au volume les résultats vus pour les aires. Ainsi le calcul du volume d'un parallélépipède de longueur 0,7 m, de largeur 10 cm et de hauteur 50 mm peut être conduit de plusieurs manières :

$V = 0{,}7\text{ m} \times 10\text{ cm} \times 40\text{ mm} = 0{,}7\text{ m} \times 0{,}1\text{ m} \times 0{,}04\text{ m} = 0{,}0028\text{ m}^3$.

$V = 0{,}7\text{ m} \times 10\text{ cm} \times 40\text{ mm} = 70\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 2800\text{ cm}^3$.

Si on cherche à exprimer le volume en dm^3, on peut par exemple procéder ainsi :

$$\begin{aligned} V &= 0{,}7\text{ m} \times 10\text{ cm} \times 40\text{ mm} = 0{,}7\ (10\text{ dm}) \times 10\ (10^{-1}\text{ dm}) \times 40\ (10^{-2}\text{ dm}) \\ &= 7\text{ dm} \times 1\text{ dm} \times 0{,}4\text{ dm} = 2{,}8\text{ dm}^3 = 2{,}8\text{ L}. \end{aligned}$$

On peut conduire de même les autres calculs de volume figurant aux programmes, en interprétant les formules en termes de grandeurs (produit de trois longueurs, ou produit d'une aire par une longueur, en tenant compte des coefficients convenables). De tels calculs avec les grandeurs sont utilisés dans des manuels scolaires de pays voisins (Voir annexe 4).

Remarque :

Du point de vue théorique, on aurait pu imaginer que le passage des aires dans le plan aux volumes dans l'espace ne pose guère de problème. Pourtant dès l'époque d'Euclide, des difficultés sont apparues. Dans les Éléments, lorsqu'il traite du volume de la pyramide, il renonce aux techniques d'équidécomposition pour recourir à la méthode d'exhaustion. Figurant dans la liste de vingt-trois problèmes posés par Hilbert au congrès de Paris en 1900, le troisième consiste à démontrer que les méthodes de décomposition et de complémentation sont insuffisantes pour prouver la formule du volume d'une pyramide dans le cas général, et à justifier ainsi la nécessité de recourir à des méthodes non élémentaires faisant appel à l'infini

[23] Voir *Jeux 5*, Des activités mathématiques au collège, Curvica (6 pages), Brochure A.P.M.E.P. n° 119, 1998.

(telles que la méthode d'exhaustion), pour établir la théorie des volumes de polyèdres. Ce troisième problème a été résolu par Max Dehn l'année même où Hilbert l'avait posé[24]. Dehn a trouvé une condition nécessaire pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables. Cette condition fait intervenir un invariant, l'invariant de Dehn d'un polyèdre : si deux polyèdres sont équidécomposables, leurs invariants de Dehn sont égaux. En montrant que les invariants de Dehn du tétraèdre régulier ayant pour côté l'unité et celui du cube de même volume sont différents, on prouve qu'ils ne sont pas équidécomposables. Le théorème de Dehn montre que l'on ne peut pas fonder la théorie des volumes sur l'équidécomposabilité. L'appel à l'équicomplémentarité permet-il de combler cette lacune ? La réponse est négative : en fait, Sydler a démontré dans les années 1940 que dans l'espace euclidien de dimension 3, l'équidécomposabilité et l'équicomplémentarité pour les polyèdres sont des propriétés équivalentes. Ce résultat a été étendu à la dimension *n* par Hadwiger, et une nouvelle démonstration de ce résultat a été donnée par Zylev en 1965.

Pour justifier la formule donnant le volume de la pyramide ou du cône, on peut recourir à du matériel pédagogique permettant de comparer le volume d'une pyramide et du cylindre de même base et de même hauteur en comparant les masses d'un même liquide avec lequel on les remplit. Une autre justification est donnée dans l'annexe 3.

Il est plus difficile de donner une justification simple de la formule relative au volume de la sphère. Les justifications données dans des pays voisins (Allemagne) repose sur l'emploi du principe de Cavalieri.

3.5 Masses

L'essentiel a été installé à l'école à ce sujet. Le calcul sur les masses, plutôt que sur leurs seules mesures, facilite les conversions, rendant inutiles l'emploi d'un tableau. L'emploi des puissances de 10 permet d'éviter le recours à des fractions décimales. Par exemple :
23 g = 23 (1/100 kg) = (23 × 1/100) kg = 23/100 kg = 0,23 kg.

3.6 Durées

La question est plus délicate du fait de l'utilisation de deux systèmes de numération (décimale et sexagésimale). Les élèves connaissent les unités du système sexagésimal et les relations de proche en proche mais, ils sont loin d'être experts quand il s'agit d'effectuer une conversion. Afin de consolider les connaissances construites à l'école et d'engager un travail spécifique sur les conversions entre mesure sexagésimale et mesure décimale, là encore l'emploi de calculs sur les durées, plutôt que sur leurs seules mesures, permet de résoudre bien des difficultés, en particulier pour les conversions, comme le montrent les exemples ci-dessous.

• Il s'agit de déterminer combien il y a de minutes dans une demi-heure, dans un quart d'heure, dans un cinquième d'heure.
Le calcul avec unités suivant permet d'accompagner un raisonnement qui n'est souvent fait qu'à l'oral : $\frac{1}{5}\text{ h} = \frac{1}{5}(60\text{ min}) = \left(\frac{1}{5}\times 60\right)\text{min} = 12\text{ min}.$

• Lors d'un calcul, on a trouvé une durée exprimée sous forme d'un nombre décimal d'heures, par exemple : 1,82 h. Comment la transformer en heures et minutes ?
0,82 h = 0,82 (60 min) = (0,82 × 60) min ≈ 49 min. Donc 1,82 h ≈ 1 h 49 min.

[24] Pour une démonstration du théorème de Dehn, voir par exemple : Stillwell, 1998, *Numbers and geometry*, Springer, ou encore Aigner M. & Ziegler G.M., 2006, *Raisonnements divins*, Springer, traduction par Nicolas Puech de la troisième édition de *Proofs from THE BOOK.*

Si on a besoin d'une précision à la seconde, $(0{,}82 \times 60)$ min = 49,2 min. Il reste à convertir 0,2 min en secondes : 0,2 min = 0,2 (60 s) = $(0{,}2 \times 60)$ s = 12 s. Ainsi, 1,82 h = 1 h 49 min 12 s.

Le calcul avec unités est particulièrement pratique dans les problèmes de conversion mettant en œuvre deux systèmes de numération.

3.7 Grandeurs discrètes

« J'entends par cardinal d'un ensemble M le concept universel ou générique que l'on obtient en faisant abstraction pour l'ensemble aussi bien de la constitution de ses éléments que de toutes les relations que ses éléments ont entre eux ou avec d'autres choses, donc, en particulier aussi, de l'ordre qui règne entre eux, et ne considère que ce qui est commun à tous les ensembles équivalents à M ». Tel est le commentaire donné par Cantor (1884) à propos de la définition d'un cardinal. La double abstraction à laquelle il fait allusion se retrouve dans les notations qu'il utilise : $\overline{M}$ pour l'ordinal de M, et $\overline{\overline{M}}$ pour son cardinal.

Ce détour par le vocabulaire de la théorie des ensembles montre d'une part que, les cardinaux ont des aspects communs avec les grandeurs, notamment si l'on se limite aux cardinaux des ensembles finis. On les définit en utilisant une relation d'équivalence, on peut les ordonner, les additionner, les multiplier par un nombre entier. Mais la division par un nombre entier n'est pas toujours définie.

Cependant cette différence n'empêche pas d'associer une grandeur à des ensembles finis d'êtres (ou d'objets), leur cardinal apparaissant comme la mesure de cette grandeur, si on prend comme unité l'être (ou l'objet). On le fait couramment en statistique, quand on évoque la notion de population, le cardinal étant alors souvent appelé « effectif » de la population. On rejoint ainsi l'acception courante du mot « cardinal » dans « nombre cardinal », opposé à « ordinal », dont l'emploi est attesté depuis 1680[25]. Les adjectifs cardinaux, comme « un », « sept », « vingt-cinq » s'emploient devant les noms désignant des êtres ou des choses que l'on peut compter (noms comptables). On parle ainsi d'une population de 1 500 habitants (notée 1 500 hab.). En statistique, la notion de population est étendue à d'autres êtres ou choses comme des animaux, des personnes interrogées lors d'un sondage, des objets fabriqués sur une chaîne de montage, …

Il arrive que l'on choisisse une autre unité que l'individu, et que l'on compte « par six », « par dizaine », « par douzaine », …, « par million ». La mesure de la grandeur associée à la population peut ne plus être un nombre entier[26] : on parle d'une population de 2,3 Mhab.

Si on ne peut parler du tiers d'une population de 10 habitants, cette restriction perd son sens dès que l'effectif est grand, ce qui est souvent le cas en statistique : ainsi peut-on parler du tiers d'une population de 2200 habitants, même si 2200/3 n'est pas un nombre entier, d'autant plus qu'on se contente alors d'un résultat approché. On calcule sur les grandeurs discrètes comme sur les autres grandeurs.

Les grandeurs discrètes interviennent de manière importante en mathématiques et dans d'autres disciplines, comme le montrent des grandeurs aussi courantes que la densité de population, le débit d'un trafic routier (exprimé en véhicule/heure), le trafic ferroviaire (exprimé en voyageur - kilomètre), ou la quantité de matière en chimie (1 mole de carbone = $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes de carbone) qui sera étudiée au lycée. Leurs interventions sont détaillées dans les paragraphes 4 et 5.

---

[25] Le Robert, dictionnaire historique de la langue française, sous la direction d'Alain Rey.

[26] Ce fait souligne le besoin d'un mot nouveau pour désigner cette grandeur attachée à une population, besoin auquel répond parfois le mot « quantité ». "1500 personnes" ne désigne pas un ensemble de personnes, mais une quantité (cardinalité ?) attachée à tout ensemble de personnes de cardinal 1500.

4. Grandeurs quotients

41. Quotient (ou rapport) de deux grandeurs de même espèce

a et b désignant deux grandeurs de même espèce (deux longueurs, ou deux aires, ou deux durées, …), a étant non nulle, il existe un nombre réel positif k et un seul tel que : $b = k\,a$. Ce nombre est appelé rapport de b à a, et noté $\frac{b}{a}$. C'est également la mesure de b quand on prend a comme unité. Les deux égalités « $b = k\,a$ » et « $\frac{b}{a} = k$ » sont donc, par définition, équivalentes.

Désignons par u une unité de la grandeur de même espèce que a et b, α et β les mesures respectives de a et b avec cette unité : on a donc $a = \alpha$ u et $b = \beta$ u. De $b = k\,a$, on déduit que $b = k\,(\alpha$ u), donc $b = (k\alpha)$ u. Il en résulte que $k\alpha$ est la mesure de b, donc que $\beta = k\alpha$, et donc k apparaît comme étant le quotient de β par α. Ainsi $\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui montre que le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient de leurs mesures avec une même unité, *quelle que soit cette unité*.

Les développements qui précèdent, présentés sous forme générale, permettent de justifier des égalités telles que les suivantes : $\frac{15\text{ m}}{3\text{ m}} = 5$; $\frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = \frac{30\text{ m}}{50\text{ m}}$, dans lesquelles on peut "simplifier par cm (par m)". L'emploi de la première égalité ne pose guère de problème ; en revanche, celui de la deuxième suppose qu'un travail préalable ait été fait sur la notion de quotient de deux nombres entiers ainsi que le type de tâches « prendre une fraction d'une grandeur » en relation avec les écritures équivalentes : 3 cm = $\frac{3}{5}$ (5 cm) ; 30 m = 0,6 (50 m).

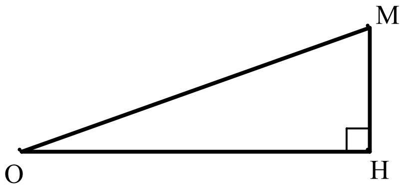
Les rapports de deux grandeurs de même espèce jouent évidemment un rôle fondamental dans le traitement de certaines situations de proportionnalité (Voir le paragraphe 6). On les exprime souvent sous forme de pourcentage : a% est une autre écriture du quotient de a par 100. L'origine de cette notation (glissement dans la graphie de per 100 à P.$\overset{\text{o}}{\text{c}}$ puis à %) est décrite en détail dans l'ouvrage précisé en note[27]. Dans certaines disciplines, on appelle pourcentage le numérateur (ici, a) : c'est la raison pour laquelle on demande alors aux élèves de multiplier par 100 le résultat précédent. Cette pratique n'est pas sans lien avec l'usage des indices (Voir ci-dessous).

De tels rapports sont également sollicités pour définir des grandeurs (sans dimension) utilisées dans la vie courante, ou dans d'autres domaines des mathématiques :

- Si une grandeur passe de la valeur G_0 à la date t_0 à la valeur G_1 à la date t_1, on appelle variation absolue la différence ΔG entre la plus grande valeur et la plus petite (on parle d'augmentation si $G_1 > G_0$, de diminution sinon)[28]. On appelle variation relative de la grandeur entre les deux dates (ou taux de croissance ou de décroissance) le quotient de ΔG par G_0. Ainsi, par exemple, si un prix passe de 85 € à 87 €, l'augmentation est de 2 €. Si on la rapporte au prix initial (ce qui revient à prendre ce dernier comme unité), on est conduit à calculer le rapport : $\frac{2\text{ E}}{85\text{ E}}$, égal à $\frac{2}{85}$. Ce nombre est peu différent de 0,0235, soit 2,35%.

[27] Voir l'ouvrage de Cajori F., 1993, *A history of mathematical notations*, Dover, pour les détails, page 312.
[28] On peut évidemment algébriser cette notion, en utilisant les nombres relatifs.

- Les indices couramment utilisés dans les règles fixant les révisions de prix dans les contrats, et souvent cités dans les médias, ont pour but de faciliter la comparaison d'observations d'une même grandeur faites à des périodes différentes. Ainsi, si un prix vaut 85 € en 2006 et 87 € en 2007, l'indice du prix en 2007 sur la base 100 en 2006 est $100 \times \frac{87\text{ E}}{85\text{ E}}$, soit $100 \times \frac{87}{85}$, c'est-à-dire environ 102,35. On notera qu'il est égal à la mesure en € du prix en 2007 d'un objet qui coûtait 100 € en 2006. On dit que l'indice base 100 en 2006 est passé à 102,35 en 2007. Plus généralement si une grandeur passe de la valeur G_0 à la date t_0 à la valeur G_1 à la date t_1, on appelle indice de la grandeur G à la date t_1 sur la base 100 à la date t_0 le nombre noté I_{t_0/t_1}, défini par : $I_{t_0/t_1} = 100 \times \frac{G_1}{G_0}$. Le véritable intérêt des indices est leur transitivité : si $I_{t_1/t_0} = 105$ et $\mathrm{I}_{t_2/t_1} = 107$, que dire de I_{t_2/t_0} ? 105×107 = 11235. On peut vérifier que l'indice recherché est 112,35. Les règles et techniques de tels calculs sur les indices ne figurent pas au programme de 4^{e}.
- Le taux d'incertitude lorsqu'on mesure une grandeur : par exemple, si une intensité est de 12,4 A à 0,1 A près, le taux d'incertitude est $\frac{0{,}1}{12{,}4}$, soit à peu près 0,008.
- l'échelle d'une carte (rapport de deux longueurs) ; les pratiques sociales utilisant des plans (plan d'une ville, d'un quartier, …) tendent vers une démathématisation apparente des échelles : au lieu de les exprimer avec une fraction en *n*-ème, (qui est un "scalaire", mot de même origine que "échelle"), on les exprime avec des locutions du type « 1 cm pour 20 m », qui sont également des scalaires, malgré la présence d'unités : $\frac{1\text{ cm}}{20\text{ m}} = \frac{1\text{ cm}}{2000\text{ cm}} = \frac{1}{2000}$. En fait, les mathématiques sous-jacentes sont celles des longueurs, et non plus celles de leurs mesures (auxquelles l'enseignement récent tend à les réduire, ce qui n'est pas sans conséquence sur la compréhension des élèves).
- la pente d'une route (rapport de deux longueurs) : c'est en effet le rapport de la dénivellation (longueur MH) à la longueur horizontale OH souvent exprimé sous forme de pourcentage, 5% par exemple.



Comme pour les échelles, on parle d'une pente de 5 cm/m, expression qui fait implicitement allusion au rapport de longueurs $\frac{5\text{ cm}}{1\text{ m}}$. Pour une voie ferrée, la pente est plus faible, de l'ordre de 6 mm/m ; pour les conduites d'eaux usées, la pente ne doit pas être inférieure à 1 cm/m. Dans certaines disciplines[29], on considère la déclivité qui est le rapport de la dénivellation HM à la longueur OM, correspondant au sinus de l'angle HOM. Pour les valeurs de l'angle inférieures à 10°, la pente et la décilivité sont très voisines, la déclivité étant inférieure à la pente.
- Les fréquences : on est ici encore dans le domaine des grandeurs, et une fréquence est un rapport de deux grandeurs de même espèce, un quotient de deux cardinaux

[29] Le cyclisme par exemple.

(ou effectifs) donc un nombre sans dimension. S'y ajoute le fait que les grandeurs que l'on considère sont liées par des relations du type “partie / tout”, ce qui explique que les quotients en question sont compris entre 0 et 1, et sont souvent écrits sous forme de pourcentage. Dans le langage courant, au lieu du mot “fréquence”, on emploie souvent le mot “proportion” (que l'on réservait en mathématiques, il y a quelques années, pour signifier l'égalité de deux rapports). On parle également de taux : par exemple, le taux de chômage, quotient du nombre de demandes d’emploi non satisfaites par la population active totale (chômeurs compris).

Remarque : Dans de nombreux pays, on utilise les fréquences pour enseigner la notion de quotient. Ainsi, si dans une classe de 25 élèves, il y a 14 filles et 11 garçons, et qu'une nouvelle fille s'y inscrit, la proportion de filles dans la classe augmente : ce qui prouve que $\frac{14}{25} < \frac{15}{26}$. De tels raisonnements sont classiquement enseignés en Angleterre comme technique de comparaison des “fractions”.

- Les rapports trigonométriques d’un angle aigu sont des rapports de longueurs, qui apparaissent comme tels dans certains manuels scolaires de pays voisins (Voir l’annexe 4).
- L’ensoleillement d’une région, rapport de deux durées, par exemple, 2 300 heures par an, soit environ 26%.
- Le rendement d’un moteur électrique : rapport de l’énergie mécanique qu’il fournit à l’énergie électrique qu’il faut lui fournir.
- La densité d’une substance est le rapport de deux masses : celle d’un certain volume de cette substance à la masse d’un même volume d’eau (c’est aussi le rapport de sa masse volumique à celle de l’eau).

4.2 Quotient de deux grandeurs d’espèces différentes

La question a été évoquée dans le 1, en prenant l’exemple de la vitesse. La vie quotidienne met en avant la vitesse instantanée, que l’on peut lire sur un compteur, ce qui n’aide guère à appréhender la notion de vitesse moyenne. Souvent, c’est la distance comme produit d’une vitesse par une durée qui est implicitement convoquée comme dans la phrase « J’habite à dix minutes du centre ville », qui présuppose la vitesse à employer, par exemple celle d’un piéton.

L’introduction des grandeurs quotients vise à donner à la formule $v = \frac{d}{t}$ une signification en termes de grandeurs, de manière à obtenir une formule indépendante des unités choisies, afin par exemple de pouvoir conduire le calcul suivant :

$$60 \text{ km/h} = \frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{60\ 000 \text{ m}}{3\ 600 \text{ s}} = \frac{60000}{3600} \text{m/s} = \frac{100}{6} \text{m/s} \approx 16{,}67 \text{ m/s},$$

et à conserver les liens existant entre quotient et produit : $v = \frac{d}{t}$ est équivalent à $d = v\,t$.

Si on veut que, dans la formule $d = v\,t$, les lettres désignent les grandeurs dont elles sont les initiales, il n’est pas possible que v soit un nombre. En effet, en multipliant une durée par un nombre, on obtient une durée et non une longueur. On est donc conduit à définir une grandeur qui, multipliée par une durée, donne une longueur : il est naturel de l’appeler quotient d’une longueur par une durée, par analogie avec la définition du quotient de deux nombres. Par exemple, on obtient 75 km en multipliant 1,25 h par le quotient $\frac{75 \text{ km}}{1{,}25 \text{ h}}$. De manière plus générale, considérons le quotient $\frac{d}{t}$, où d désigne une longueur et t une durée. Si à durée

constante, on multiplie la distance par k, la vitesse est multipliée par k. Si à distance constante, on multiplie la durée par k', la vitesse est divisée par k'. Ces résultats se traduisent par les écritures : $\frac{k\,d}{t} = k\,\frac{d}{t}$; $\frac{d}{k't} = \frac{1}{k'}\,\frac{d}{t}$, qui sont conformes aux règles de calculs usuelles sur les quotients. On en déduit : $\frac{k\,d}{k't} = \frac{k}{k'}\,\frac{d}{t}$. Il en résulte que $\frac{75\text{ km}}{1{,}25\text{ h}} = \frac{75}{1{,}25}\,\frac{1\text{ km}}{1\text{ h}} = 60\,\frac{1\text{ km}}{1\text{ h}}$.
Le quotient $\frac{1\text{ km}}{1\text{ h}}$ est noté plus simplement : km / h. Finalement, la grandeur par laquelle il convient de multiplier 1,25 h pour trouver 75 km est notée 60 km / h :

$$75\text{ km} = 60\text{ km / h} \times 1{,}25\text{ h}.$$

On obtient ainsi une écriture qui décrit, avec des opérations sur les grandeurs concernées, le phénomène suivant, qu'un élève de 4e conçoit bien : en roulant à la vitesse moyenne de 60 km / h pendant 1 h 1/4, on parcourt une distance de 75 km.

Plus généralement, on peut définir le quotient de deux grandeurs d'espèces différentes comme on vient de le faire pour celui de la longueur par une durée. De tels quotients, dans lesquels les lettres u et v désignent des unités de deux grandeurs, et a et b des nombres, font l'objet de la convention de notation suivante :

$$b \text{ étant non nul, } \frac{a\text{ u}}{b\text{ v}} = \frac{a}{b}\text{ u/v}.$$

Quand deux telles grandeurs sont proportionnelles, la détermination de la grandeur correspondant à c u conduit à multiplier cette dernière par une grandeur quotient de la forme d v/u. On obtient cd v, comme par exemple : 5 m/s × 10 s = 50 m. Les règles de calculs relatives aux grandeurs sont alors les mêmes que dans le calcul algébrique usuel (on peut "simplifier" par u, par s dans l'exemple).

La citation suivante[30] dans laquelle l'auteur évoque les longueurs et les nombres,

> « Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2m.75 d'étoffe à 28 fr. 45 le mètre. »

met bien en évidence les deux types de grandeur quotient :

- les rapports de longueurs (ou mesures relatives à une ou plusieurs unités : si w = a v et v = b u, alors w = ab u) lorsqu'il cite le problème de changement d'unité ;
- le quotient de deux grandeurs d'espèces différentes lorsqu'il évoque le problème de changement d'objet (une longueur d'étoffe étant changée en son prix). Les grandeurs quotients permettent de traiter les situations (nombreuses) sollicitant un changement d'objets : durée transformée en longueur en la multipliant par une vitesse, quantité d'une denrée transformée en prix en multipliant par un « prix unitaire » ou un « prix au kilo, ou au litre ». Elles fournissent des notations permettant de mettre en évidence les différents sens de la multiplication (un autre sens sera évoqué au paragraphe 5.).

Pour fondre dans la même théorie les quotients de grandeurs de toutes espèces, on est conduit à considérer les nombres eux-mêmes comme une grandeur particulière (la grandeur sans dimension).

Remarque : Justifications des opérations sur les grandeurs

Peut-on trouver une justification plus formelle des définitions des quotients et produits de grandeurs ? La réponse est affirmative[31]. On peut interpréter une espèce de grandeur

---

[30] Henri Lebesgue, 1975, *La mesure des grandeurs*, Librairie Blanchard, Note en bas de page 13.

comme une demi-droite vectorielle, que l'on peut compléter en une droite vectorielle en « algébrisant » la grandeur en question. On peut alors utiliser un produit tensoriel pour définir le produit de deux grandeurs, l'inverse d'une grandeur étant son dual. La théorie permet alors d'élaborer une « algèbre des grandeurs » couvrant toutes les relations entre grandeurs faisant apparaître des puissances à exposants entiers relatifs, et donc toutes les grandeurs enseignées au collège. Mais la vertu de tels exposés est la même que celles des « constructions » des ensembles de nombres à l'égard de la théorie des entiers naturels. Elles assurent la consistance de la théorie des grandeurs avec l'algèbre linéaire, mais elles ne donnent pas les raisons de la création des opérations sur les grandeurs, et leur utilité vise davantage la culture du professeur que l'enseignement des grandeurs dans sa classe. La théorie plus récente de Whitney (Voir [12] et surtout [6]) fournit une théorie axiomatique des grandeurs, suffisamment élaborée pour répondre à tous les besoins en physique classique, et permettant une mathématisation (utilisant l'algèbre linéaire) de l'analyse dimensionnelle : les conditions d'application du résultat « Si une grandeur dépendant de deux autres est proportionnelle à chacune d'elles l'autre étant supposée constante, alors elle est proportionnelle à leur produit » y sont précisées dans le cadre théorique adopté. Whitney y défend également la présence des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques.

4.3 Exemples de grandeurs quotients

Les exemples de quotients de grandeurs de même espèce ont été développés au 4.1. Le présent paragraphe est consacré aux autres quotients de grandeurs dont les exemples classiques sont présentés dans le tableau suivant.

Grandeur 1	Grandeur 2	Quotient de la grandeur 1 par la grandeur 2	Exemples d'unités d'emploi courant
Masse de substance dissoute dans une solution	Volume de la solution	Concentration	g/L, g/cm^3, …
Masse d'un corps homogène	Volume de ce corps	Masse volumique	t /m^3, kg/dm^3, g/L, …
Volume d'un liquide qui s'écoule	Durée	Débit - volume	m^3 / s, L/s, …
Masse d'une substance qui s'écoule	Durée	Débit - masse	kg/s, …
Volume de carburant consommé	Longueur parcourue	Consommation moyenne	L/100 km, L/km, …
Longueur parcourue	Durée du parcours	Vitesse moyenne	km/h, m/s, …
Différence de vitesse entre deux instants	Durée	Accélération (ou décélération) moyenne	m/s/s ou m/s^2, …
Angle	Durée	Vitesse angulaire	t/min, t/s …
Masse d'une culture récoltée	Aire du terrain de culture	Production moyenne (ou rendement)	q/ha, t/ha, …
Longueur d'un réseau (routier ou ferroviaire)	Aire de la région concernée	Densité d'un réseau	km / km^2, …
Masse (d'un rail, d'un fil)	Longueur	Masse linéique	kg/m, mg/m …

[31] Voir la référence [13] en bibliographie, chapitre 10, intitulé « Mesure des grandeurs ».

Masse (d'une feuille de papier …)	Aire de la feuille	Masse surfacique (ou grammage)	g/m^2, …
Prix d'un produit	Masse du produit	Prix "massique" ou prix au poids	€/kg, €/100g, €/g, …
Prix d'un produit	Volume du produit	Prix "volumique" ou prix au volume	€/L,€/m^3, …
Prix d'un produit	Aire du produit	Prix "surfacique"	€/m^2, €/ha, …
Prix d'un trajet	Longueur du trajet	Prix "linéique"	€/km, …
Prix d'un service	Durée du service	Prix "horaire"	€/h,…
Prix d'une énergie	Énergie (électricité)		€/kWh
Produit national (resp. intérieur) brut d'un pays (PNB, resp. PIB)	Population	PNB par habitant (resp. PIB par habitant)	€/hab. ou $/hab.
Population d'un pays	Aire (superficie) du pays	Densité de population	hab/km^2
Population (par ex. de véhicules franchissant un poste de comptage pendant une durée, …)	Durée	Intensité du trafic	véhicule/h, …,

Il existe des grandeurs quotients qui ne sont pas employées dans la vie sociale, mais qui pourraient l'être. Par exemple, avec une consommation moyenne de 8 L aux 100 kilomètres, un conducteur d'automobile peut se demander combien de kilomètres il pourrait parcourir avec un litre de carburant : c'est alors l'inverse de la consommation moyenne qui serait pour lui un outil pertinent. En effet, l'inverse de $\frac{8\text{ L}}{100\text{ km}}$ est $\frac{100\text{ km}}{8\text{ L}}$, c'est-à-dire 12,5 km/L, grandeur quotient qui donne immédiatement la réponse : avec 1 L de carburant, il pourra en moyenne parcourir 12,5 km. Plus généralement, l'inverse de $\frac{a}{b}$u/v est $\frac{b}{a}$ v/u et son emploi est évoqué au paragraphe 6.

Un autre exemple de grandeur quotient joue un rôle très important, en liaison avec la notion de fonction. Elle concerne plus précisément l'accroissement moyen d'une fonction entre deux valeurs de la variable. Il sera abordé au paragraphe 7.

5. Grandeurs produits, grandeurs composées

5.1 Grandeurs produits

Le produit de deux grandeurs, tel qu'il a été évoqué dans les paragraphes 3.3 et 3.4 consacrés aux aires et aux volumes, peut être généralisé au cas de deux grandeurs quelconques. Il est utile chaque fois que, à deux grandeurs g et g' (de même espèce ou non), on peut en associer une troisième, qui est telle que : chaque fois que l'une des grandeurs est multipliée par un nombre, l'autre étant maintenue constante, la troisième est multipliée par ce même nombre. Cette troisième grandeur est appelée « produit de g par g' » et notée $g \times g'$ ou parfois $g\,g'$. On a donc : quels que soient les nombres k et k',

$$(k\,g)\times g' = k\,g\times g' \,;\, g\times(k'g') = k'\,g\times g' \,;\, (k\,g)\times(k'g') = kk'\,g\times g'.$$

Si u et v désignent des unités respectives de deux grandeurs, a et b désignant des nombres, le produit de a u par b v, noté « a u × b v », est égal à ab u × v. Usuellement, on note uv au lieu de u × v, et donc, quelles que soient les unités u et v, quels que soient les nombres a et b :

$$a\text{ u} \times b\text{ v} = ab\text{ uv}.$$

Exemples de grandeurs produits de deux grandeurs

Grandeur 1	Grandeur 2	Produit de la grandeur 1 par la grandeur 2	Exemples d'unités d'emploi courant
Longueur (longueur d'un rectangle, base d'un parallélogramme , …)	Longueur (largeur d'un rectangle, hauteur d'un parallélogramme, …)	Aire (d'un rectangle, d'un parallélogramme, …)	m^2, cm^2, km^2, … ha, a, ca.
Aire (base d'un prisme, d'un cylindre, …)	Longueur (hauteur correspondante, …)	Volume	m^3, dm^3, cm^3, …
Masse (transportée)	Longueur (du transport)	Trafic de marchandises	t - km
Volume (transporté)	Longueur (du transport)	Déplacement (de terre dans un chantier, …)	m^3 - hm ou m^3 - km
Population (de voyageurs, ou de sièges)	Longueur (du transport)	Trafic de voyageurs	voyageur - km, siège - km
Durée de travail (journée,…)	Population (de stagiaires)	Volume d'un stage	journée - stagiaire
Population (de travailleurs)	Durée de travail	Volume d'un chantier, d'une prestation	homme - jour
Puissance	Durée	Énergie (électrique)	kWh, millier de kWh, milliard de kWh.

De nombreuses grandeurs produits sont introduites au lycée : quantité de mouvement, (produit d'une masse par une vitesse), force (produit d'une masse par une accélération), …

5.2 Grandeurs composées

À partir des grandeurs produits et quotients, on peut en définir d'autres : quotient d'un produit par une grandeur, quotient d'une grandeur par un produit …

Les exemples suivants sont évoqués dans d'autres disciplines :

- énergie électrique par habitant : exprimée en milliers de kWh/hab. ;
- prix unitaire de l'énergie électrique : exprimée en €/kWh ;
- plus généralement, prix unitaire de toute grandeur produit commercialisée ;

D'autres grandeurs composées sont créées dans chaque secteur d'activité, en fonction de ses besoins : on a cité plus haut le rendement moyen d'un établissement commercial par mètre carré et par an, exprimé en € / m^2 / an ou encore € / (m^2 × an). La question des énergies renouvelables conduit à s'intéresser à la « densité énergétique » d'une installation de production d'énergie, qui est le quotient de la puissance fournie par le produit de son coût par son encombrement, dont l'unité est par exemple : MW / (M€ × km^2). Dans la législation relative à l'incidence éventuelle de la téléphonie mobile sur la santé, on définit un débit d'absorption spécifique (DAS corps entier ou DAS spécifique) qui est le quotient du débit d'énergie (ou puissance) absorbée (par un corps humain, ou par une de ses parties) par sa masse[32], qui s'exprime en W/kg.

6. Calculs sur les grandeurs – Calculs sur les mesures

6.1 Pourquoi des grandeurs et des mesures ?

Les difficultés rencontrées dans l'enseignement des durées (passage d'une fraction d'heure en minutes, passage des "heures décimales" aux "heures sexagésimales" ou passages dans l'autre sens), dans l'enseignement des aires et périmètres (et notamment dans l'identification de l'unité à utiliser en fin de calcul), dans l'enseignement des grandeurs quotients (difficulté dans l'utilisation effective de la formule $d = vt$, par exemple) trouvent parfois leur origine dans l'absence de moyens écrits pour travailler sur les grandeurs, conduisant à un traitement portant uniquement sur les mesures des grandeurs en jeu.

L'introduction des grandeurs dans les calculs (par le moyen d'unités) vise à fournir au professeur des moyens pour réduire les difficultés dans l'apprentissage. Il ne s'agit évidemment pas de faire un cours sur les grandeurs (les développements à caractère théorique qui précèdent sont destinés au professeur), mais d'utiliser des moyens symboliques qui permettent de traiter à la fois des grandeurs et de leurs mesures, de manière à accompagner et contrôler les calculs faits sur ces dernières par un calcul sur les unités des premières. Les nombreux exemples donnés au fil des paragraphes qui précèdent mettent en évidence les aspects fondamentaux suivants :

- les formules telles que celles donnant le périmètre d'un carré ($P = 4\,c$), l'aire d'un rectangle ($A = L \times l$), … sont des relations entre grandeurs, *ne dépendant pas des unités choisies*. La formulation de lois à l'aide de relations indépendantes du choix des unités des grandeurs qu'elles relient est une préoccupation importante dans toutes les sciences, qui vaut pour les grandeurs "scalaires" étudiées au collège, pour les grandeurs vectorielles qui le seront au lycée et les grandeurs tensorielles, étudiées plus tard. Dans les débuts de l'enseignement, ce fait est plus facile à mettre en évidence dans l'enseignement des mathématiques que dans celui des sciences physiques, où le nombre de grandeurs en jeu devient vite assez grand, ce qui conduit à introduire davantage de noms d'unités.
- un tel calcul suppose connues les opérations élémentaires (addition, multiplication par un nombre entier, division par un nombre entier) sur la grandeur fondamentale que constituent les longueurs, leur addition jouant un rôle irremplaçable. Le problème de la mesure des longueurs engendre des besoins numériques, auxquels répondent les nombres décimaux (déjà étudiés) et plus généralement les nombres rationnels, dont le double aspect (fractions du nombre 1, quotient de p par q) peut être éclairé dans le cadre des longueurs.
- le calcul avec unités permet au professeur de donner des traces écrites à des explications qui, sans lui, ne trouvent leur place qu'à l'oral : « quand on multiplie des cm par des cm, on ne trouve pas des cm, mais des cm^2 ». Il permet en outre à l'élève de contrôler le résultat d'un calcul, en éliminant notamment des résultats absurdes. Par exemple, si on demande de calculer la distance parcourue en 3 h en roulant à la vitesse moyenne de 60 km/h, la « confusion entre la multiplication et la division » qui peut pousser certains élèves à trouver 20 km en divisant 60 par 3, peut être évitée par une mise en place du calcul avec unités : 60 km/h × 3 h = 180 km.
- le calcul avec unités permet des techniques de conversion beaucoup plus fiables, et plus intelligibles. Si on se restreint aux calculs concernant des grandeurs de même

[32] Voir le site Internet du Sénat.

espèce, la présence d'unités favorise les explications et la pratique des conversions, notamment quand on passe d'un système décimal à un système sexagésimal.

6.2 L'enseignement de la proportionnalité

Cette question fait déjà l'objet d'un document d'accompagnement particulier, détaillant les techniques de résolution utilisables selon la classe. Le présent paragraphe a pour but d'éclairer l'éventail des choix de techniques et de leurs justifications en faisant référence aux grandeurs.

• En classe de 6^e^ et de 5^e^, sont privilégiées les situations mettant en œuvre deux grandeurs proportionnelles de même espèce. La procédure utilisant la propriété d'homogénéité, le passage par l'unité, et la procédure employant l'un des coefficients de proportionnalité font intervenir de manière plus ou moins directe des rapports de grandeurs de même espèce, dont la nature évolue au cours de l'étude : nombres entiers, nombres décimaux, nombres rationnels (quotient d'entiers).

Plusieurs types d'écrits sont utilisables, comme le montre l'exemple suivant :

- la langue naturelle : 15 cm, c'est 3 fois 5 cm. Or 5 cm sur la carte représentent 12,5 km en réalité, donc …
- des écrits proches de la langue naturelle, comportant des notations avec abréviations : dist. réelle pour 5 cm = 12,5 km et 15 cm = 3 × 5 cm, donc …
- des écrits de type tableau, avec opérateurs fléchés :

$\times\frac{17}{5}$ (ou $\times 3{,}4$)

$\times 3$

×? | | | | ×?

5 cm	15 cm	17 cm	
12,5 km			

Le calcul des deux coefficients de proportionnalité (2500 et l'échelle 1/2500 sont des rapports de longueurs : $\frac{12{,}5\,\text{km}}{5\ \text{cm}}$, égal à $\frac{12\,500\ \text{cm}}{5\ \text{cm}}$, soit 2500, et son inverse). Si on connaît l'échelle ou son inverse, on peut utiliser la procédure dite « du coefficient de proportionnalité », ce qui conduit ici au calcul d'une fraction de longueur ou du produit d'une longueur par un nombre entier.

D'autres situations mettent en jeu des grandeurs d'espèces différentes : masse / prix, durée / distance … La procédure de passage par l'unité, celle utilisant des rapports de grandeurs de même espèce sont utilisables comme précédemment.

×?

1 kg	2,5 kg	17 kg	
2,4 €	6 €		50,4 €

Le passage par l'unité rend inutile l'emploi de la technique du « coefficient » : il suffit d'utiliser ensuite la propriété d'homogénéité. 17 kg = 17 × 1 kg, donc … 50,4 : 2,4 = 21. Donc 50,4 € = 21 × 2,4 €. Donc 50,4 € est le prix de 21 kg … Cette situation familière permet d'introduire la grandeur quotient 2,4 €/kg, prix par kilogramme. Une situation analogue concernant le couple durée / distance relative à un mouvement uniforme permet d'introduire de même une grandeur quotient telle que 60 km/h, familière aux élèves. On peut alors écrire les résultats obtenus précédemment avec une écriture du type : 2,4 €/kg × 17 kg = 40,8 € ; 60 km/h × 2,4 h = 144 km. Ces relations permettent de travailler sur des tableaux contenant des grandeurs en intégrant le travail fait sur des tableaux de nombres :

$\times 2,4$

1	2,5	17	
2,4	6		50,4

• En 5[e] et surtout en 4[e], les grandeurs quotients « vitesse moyenne » ou « prix à l'unité » ne trouvent véritablement leur utilité que dans des situations où ces grandeurs « varient », par exemple dans des situations de comparaison. Le calcul avec unités montre son efficacité pour les calculer, et comprendre ainsi la signification et l'emploi de ces grandeurs dans la vie courante. Ainsi, le prix en €/kg d'un produit dont le poids net égoutté est 210 g et dont le prix est 3,27 € se calcule simplement ainsi : $\frac{3,27\ \text{E}}{210\ \text{g}} = \frac{3,27\ \text{E}}{0,21\ \text{kg}} = \frac{3,27}{0,21}\ \text{E}/\text{kg} \approx 15,57\ \text{E/kg}$.

• En 4[e], deux nouveautés apparaissent : la manipulation de la formule « $d = v\,t$ » pour déterminer l'une des grandeurs connaissant les deux autres ; la propriété des « produits en croix » pour caractériser l'égalité de deux quotients.

- sur le premier point, l'emploi de la formule est réglé par ce qui précède si on connaît *v* et *t* ; il en est de même si on connaît *d* et *t*. On sait en effet que la formule équivaut à $v = \frac{d}{t}$. Dans le cas où il s'agit de calculer *t*, on peut évidemment considérer que la formule s'applique à des mesures, et on est amené à calculer un quotient du nombre *d* par le nombre *v*, ce que l'on peut retrouver en raisonnant ainsi : pour parcourir *v* km, on met 1 h. Donc pour parcourir *d* km, il faudra *d/v* h. C'est à un raisonnement de ce type que l'extrait de manuel espagnol fourni en annexe 4 fait implicitement allusion, en écrivant sans autre justification : $\frac{400\ \text{km}}{220\ \text{km/h}} \approx 1,82$ h, la présence des unités servant à laisser davantage de traces écrites du raisonnement qui précède (h signifie la même chose que 1 h). On peut proposer un autre calcul avec les grandeurs à condition d'avoir symétrisé auparavant le rôle des deux grandeurs dans une situation de proportionnalité. Avec des notations que le lecteur devinera, le tableau suivant montre que diviser par *b/a* v/u c'est multiplier par *a/b* u/v.

$\times \frac{b}{a}$ v/u

a u	*c* u	
b v		*d* v

$\div \frac{b}{a}$ v/u $\times \frac{a}{b}$ u/v

L'inverse de 220 km/h est 1/220 h/km (ce qui peut s'interpréter ainsi : pour parcourir 1 km, il faut 1/220 h). Le produit « 400 km × 1/220 h/km » donne alors le résultat : 400/220 h. Le calcul sur les grandeurs constitue alors un moyen de contrôle d'un calcul, moyen dont la cohérence se développe en symbiose avec celle du calcul algébrique, le premier fonctionnant avec les mêmes règles que le deuxième. Le calcul $\frac{\text{km}}{\text{km/h}} = \text{h}$ permet d'automatiser le calcul proposé dans l'extrait de manuel, sans avoir besoin de refaire mentalement le raisonnement sous-jacent.

- sur le deuxième point, supposons que ce tableau de grandeurs soit un tableau de proportionnalité :

a u	c u
b v	d v

On peut démontrer que a u × d v = c u × b v, et réciproquement. Mais en général, la grandeur dont l'unité est u × v n'a aucune signification dans la réalité, contrairement à v/u (et dans une moindre mesure u/v). Pour la question des égalités de quotients et leur caractérisation à l'aide des produits en croix, il est donc prudent de rester dans le cadre numérique, sans en abuser dans le traitement des situations de proportionnalité, conformément aux commentaires du programme.

6.3 Les grandeurs dans une mise en équation

Cette phase constitue la partie de la résolution d'un problème par l'algèbre qui est la moins facile à enseigner. Son enseignement le plus usuel (choix de l'inconnue, traduction des données sous forme d'une équation, …) masque souvent un aspect essentiel, bien utile pour trouver un choix judicieux pour ces deux premières étapes : il convient de chercher une des grandeurs qui va pouvoir s'exprimer de deux manières en fonction d'autres grandeurs présentes dans la situation (dont celle que l'on choisira comme inconnue) et des données du problème. Ceci plaide pour l'emploi des grandeurs, au moins au début de la résolution, comme le montre les exemples suivants.

Exemple 1 (tiré du manuel espagnol pour la classe de 3^{e}, reproduit dans l'annexe 4)

> Un train part de Palencia à 8 h du matin vers Alicante à la vitesse de 80 km/h. Une heure et demie plus tard, un deuxième train part de la même gare en direction d'Alicante à la vitesse de 100 km/h. Combien de temps le deuxième train mettra-t-il pour rattraper le premier ? À quelle distance de Palencia le rattrape-t-il ?

On peut exprimer de deux manières la distance parcourue par chacun des deux trains au moment où le deuxième rattrape le premier. On peut choisir comme inconnue x le temps en heures mis par le deuxième train pour rattraper le premier. Au moment où ceci se produit, le premier train a roulé pendant une durée de (x + 3/2) h. La distance parcourue par le premier train jusqu'à ce que le deuxième le rattrape est donc : 80 km/h × (x + 3/2) h soit 80 (x +3/2) km. Quant à la distance parcourue par le second, elle est égale à 100 km/h × x h, c'est-à-dire 100x km. En égalant les nombres de kilomètres parcourus on obtient l'équation permettant de répondre à la première question : $80 (x + 3/2) = 100x$ …

Exemple 2 :

> Il faut à un homme 3 h pour faire un certain trajet. Il commence par marcher sur une partie plate à la vitesse de 6 km/h et continue en montant une pente à la vitesse de 4 km/h. Nous savons que la longueur de la pente est les 2/7 du parcours total. Calculer la longueur du parcours.

Plusieurs choix de grandeur pouvant s'exprimer de deux manières sont possibles (durée totale du parcours, durée du parcours en terrain plat). Prenons par exemple la durée totale du parcours : 3 h. Désignons par x km la longueur du parcours. La longueur de la pente est $2x/7$ km et la longueur de la partie plate $5x/7$ km. La durée sur la partie plate du parcours s'obtient en divisant $5x/7$ km par 6 km/h. On trouve : $5x/42$ h. La durée de la montée est de même le quotient de $2x/7$ km par 4 km/h : $x/14$ h. La durée totale du parcours est donc $5x/42$ h + $x/14$ h, soit ($5x/42 + x/14$) h. En égalant les deux expressions de cette durée, on en déduit l'équation d'inconnue numérique x : $5x/42 + x/14 = 3$ …

7. Calcul sur les grandeurs et fonctions

7.1 Calcul sur les grandeurs et fonction linéaire

Les calculs avec unités permettent également de rendre plus visible le passage des grandeurs proportionnelles à la fonction linéaire, objet mathématique qui permet d'en construire un modèle commun. Les deux exemples classiques suivants (eau sucrée et prix d'une masse de fromage) vont l'illustrer.

• Pour une eau sucrée, à un volume d'eau v dL, il correspond une masse de sucre, que nous noterons provisoirement “m. pour v dL”.

On a alors :

m. pour $(v + v')$ dL = m. pour v dL + m. pour v' dL

m. pour kv dL = $k \times$ m. pour v dL,

Par ailleurs, si on connaît la concentration en sucre, par exemple 2,5 g/L :

m. pour v dL = 2,5 g/dL $\times$ v dL = $2{,}5v$ g

De telles formulations, qui fournissent des moyens de résolution à adapter selon le niveau d'enseignement (la dernière fait intervenir une grandeur quotient), ont déjà été évoquées comme une alternative au tableau de proportionnalité. Elles conduisent à considérer une fonction, notée symboliquement m., qui à v dL associe $2{,}5v$ g, ce que l'on peut noter m. (v dL) = $2{,}5v$ g ou symboliquement v dL $\mapsto$ $2{,}5v$ g, fonction qui modélise la situation en termes de grandeurs.

• À une masse m kg de fromage, il correspond un prix, que nous noterons provisoirement “p. de m kg”.

On a alors :

p. de $(m + m')$ kg = p. de m kg + p. de m' kg

p. de km kg = $k \times$ p. de m kg ,

Si par ailleurs, on connaît le prix au kilogramme, par exemple 16 €

p. de m kg = 16 €/kg $\times$ m kg = $16m$ €.

On est conduit à mettre en œuvre une fonction, notée symboliquement p. qui à m g associe $16m$ €, ce que l'on peut noter symboliquement p. (m g) = $16m$ €, ou encore m g $\mapsto$ $16m$ €, fonction qui modélise la situation en termes de grandeurs.

La comparaison de ces deux modélisations en termes de grandeurs permet de dégager les aspects communs aux deux situations. Cette comparaison incite à passer des grandeurs aux mesures, ce qui conduit à considérer les deux fonctions numériques, notées respectivement m et p :

m associe à tout nombre v mesurant un volume d'eau sucrée (avec L comme unité) le nombre 2,5 v, ce que l'on peut noter $m(v) = 2{,}5\,v$, ou plus symboliquement $m : v \mapsto 2{,}5v$. Elle est telle que, pour tous les nombres v, v' et k : $m(v + v') = m(v) + m(v')$ $m(k\,v) = k\,m(v)$ $m(v) = 2{,}5v$	p associe à tout nombre m mesurant une masse de fromage (avec kg comme unité) le nombre $16\,m$, ce que l'on peut noter $p(m) = 16\,m$, ou plus symboliquement $p : m \mapsto 16m$. Elle est telle que, pour tous les nombres m, m' et k : $p(m + m') = p(m) + p(m')$ $p(k\,m) = k\,p(m)$ $p(m) = 16m$

On mesure mieux l'élévation du niveau d'abstraction pour passer de ces fonctions “linéaires” (contextualisées par le choix de leurs ensembles de départ et d'arrivée, et par le choix de la lettre pour les désigner) à la fonction linéaire (dont les ensembles de départ et d'arrivée sont étendus sans justification à **R** tout entier, et qui est désignée par une lettre n'évoquant que le mot “fonction”, indépendant de tout contexte) : on choisit usuellement de la *définir* par l’existence d’un nombre *a* tel que pour tout nombre *x*, $f(x) = ax$, plutôt que par ses propriétés fonctionnelles : pour tous les nombres *u*, *v*, *k* :

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$
$$f(k\,u) = k\,f(u)$$

ce qui constitue un renversement par rapport aux pratiques contextualisées antérieures.

Faire vivre auprès des élèves les modélisations en termes de fonctions d’une grandeur dans une autre est un moyen pour le professeur de leur montrer ce que l’on va pouvoir abstraire dans toute situation de proportionnalité, et les besoins nouveaux en termes de vocabulaire que ce passage induit. L’impossibilité de faire allusion à un contexte précis rend nécessaires à la fois des notations (comme la notation *f*, à la place de *m* et *p*) et un vocabulaire nouveau : comment appeler $f(x)$ sans faire référence à un contexte ? Le mot « image » fait référence de manière métaphorique au domaine de l’optique, la fonction étant comparée à un faisceau lumineux qui prend des éléments dans l’ensemble de départ et les « projette » dans l’ensemble d’arrivée[33].

Notons cependant que la modélisation en termes de fonction d’une grandeur dans une autre est implicitement exigé dans le registre graphique, lorsqu’on souhaite que l’élève indique les unités aux extrémités des axes. En interprétant, comme on le fait dans la théorie des grandeurs, toute grandeur comme une demi-droite vectorielle, avec des notations que le lecteur devinera, ceci revient à utiliser la grandeur longueur $\mathbf{R}^+$[unité graphique] pour représenter graphiquement chacune des deux grandeurs $\mathbf{R}^+$[u] et $\mathbf{R}^+$[v] en question. De même, dans le traitement d’un problème de proportionnalité à l’aide de la fonction linéaire qui la modélise, un retour aux grandeurs en question est nécessaire après le traitement numérique mettant en jeu la fonction. Ainsi, si $f(t)$ désigne la distance (mesurée en m) d’un point mobile à l’instant *t* s à partir d’un point donné, il est essentiel de savoir interpréter un quotient tel que $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}$ en revenant aux grandeurs sous-jacentes :

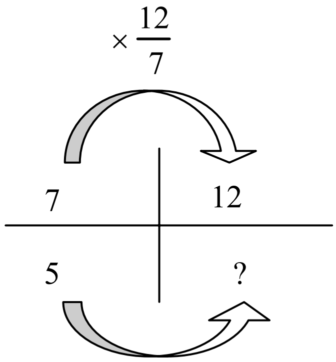
$$\frac{f(t)\mathrm{m}-f(2)\mathrm{m}}{t\mathrm{s}-2\mathrm{s}}, \text{ égal à } \frac{f(t)-f(2)}{t-2}\ \mathrm{m/s}.$$

L’interprétation géométrico - graphique d’un tel quotient[34] lorsqu’il est positif, reposant sur l’emploi du théorème de Thalès, est bien connue. Mais le repère utilisé n’a aucune raison d’être orthonormé, les unités graphiques sur chacun des axes représentant des unités de grandeur d’espèces différentes : il s’agit d’un coefficient directeur d’une droite dans un repère, et non pas d’une pente (au sens évoqué au 4.1). Un traitement graphique à l’aide d’un abaque prenant mieux en compte le lien entre la géométrie et les grandeurs est proposé en annexe 5 pour une situation mettant en oeuvre deux grandeurs inversement proportionnelles, dont la justification est accessible à des élèves de 4^{e} – 3^{e}.

L’intérêt de ce passage à la fonction linéaire abstraite réside d’abord d’une part dans l’allègement des calculs qu’elle permet pour traiter le problème posé (si on les compare par exemple à la mise en œuvre d’un tableau de proportionnalité). Les notations relatives aux fonctions permettent d'écrire en une seule ligne un raisonnement qui, dans les classes précédentes, nécessitaient la production d'un tableau (numérique) tel que le suivant :

[33] Source (entre autres) : Bertrand Hauchecorne, 2003, *Les mots & les Maths*, Ellipses.

[34] Ce quotient est usuellement appelé « taux de variation de *f* entre *t* et 2 » dans l’enseignement des mathématiques. Dans d’autres disciplines, on l’appelle « accroissement moyen de *f* entre *t* et 2 ».



Une manière de montrer l'intérêt de cette notion consiste à utiliser la notation *f* pour traiter des problèmes de proportionnalité. Supposons par exemple que *f*(7) = 5 ; on demande de déterminer *f*(12) (c'est ainsi que se formule un problème de recherche de quatrième proportionnelle). On sait que $12 = 7 \times \frac{12}{7}$. Donc : *f*(12) = $f\left(\frac{12}{7} \times 7\right) = \frac{12}{7}\, f(7) = \frac{12}{7} \times 5 = ...$

Cette technique utilise la propriété d'homogénéité d'une fonction linéaire. On notera que la définition ($f(x) = ax$) d'une fonction linéaire n'est pas utilisée, alors que l'une de ses propriétés (homogénéité) est au cœur de la technique, ainsi que la définition d'un quotient, vue dès la classe de 6[e]. D'autres techniques de résolution du problème utilisant la fonction *f* sont évidemment possibles :

f(7) = 5 ; donc 7 *f*(1) = 5, donc $f(1) = \frac{5}{7}$. Donc $f(x) = \frac{5}{7}\, x$, et en particulier $f(12) = \frac{5}{7} \times 12 = \ldots$

Remarque sur la force de la propriété d'homogénéité

Une fonction *f* de **R** dans **R** qui vérifie “pour tout (k, x), $f(kx) = k\, f(x)$” est linéaire.

En effet, si *u* et *v* sont deux nombres réels :

$$f(u+v) = f\big[(u+v)\times 1\big] = (u+v)\ f(1) = uf(1) + vf(1) = f(u) + f(v)$$

donc *f* est additive. De plus *x* désignant un nombre réel quelconque, $f(x) = f(x \times 1) = x \times f(1) = x \times a = ax$ si l'on pose $a = f(1)$.

Cette remarque justifie sur le plan mathématique le rôle important donné à l'homogénéité dans le traitement des situations de proportionnalité.

7.2 Calcul sur les grandeurs et fonctions

Reprenons l'exemple du quotient $\frac{f(t) - f(2)}{t-2}$ évoqué ci-dessus. On l'appelle accroissement moyen de *f* entre *t* et 2. $\frac{f(t) - f(2)}{t-2}$ m/s est la vitesse moyenne du mobile entre les instants *t* et 2. Si le mouvement est uniforme, la distance parcourue (dont la mesure en m est *f*(t) – *f*(2)) est proportionnelle à la durée du parcours (*t* – 2, mesuré en s). Et donc la vitesse moyenne est « constante », c'est-à-dire indépendante de *t*. On peut alors en déduire que *f* est affine (Cette propriété est démontrée dans le cas général en classe de 2[e]). La réciproque, facile à démontrer, est évoquée dans le programme de 3[e]. Si pour tout *t*, $f(t) = a\,t + b$, alors pour tout *t*, $\frac{f(t) - f(2)}{t-2} = a$.

Mais en général, le mouvement n'est pas uniforme. On peut encore parler de l'accroissement moyen $\frac{f(t)-f(2)}{t-2}$ de f entre les instants t et 2. Le calcul différentiel (classe de 1^{e}) lui donne une place très importante. Le nombre dérivé de f en 2 est la mesure en m/s de la vitesse instantanée du mobile à l'instant 2, vitesse qui est égale à $f'(2)$ m s^{-1}.

Ainsi, l'étude des fonctions linéaires et affines inaugure celle d'un nouveau secteur des mathématiques (les fonctions numériques), étude qui sera poursuivie au lycée, pour modéliser numériquement des relations entres grandeurs autres que la proportionnalité (ou la proportionnalité des accroissements).

Quelques remarques typographiques :

Les symboles d'unités s'écrivent en style “normal”[35], et ne prennent pas la marque du pluriel. Pour les noms d'unités du type u/v, seul le nom de u prend le pluriel : des kilomètres par heure. Pour les unités du type uv, le pluriel porte sur les deux noms : des tonnes - kilomètres.

[35] Cette convention a été utilisée dans ce document, même pour des noms d'unité littéraux : u, v, …

Bibliographie

[1] Documents d'accompagnement des programmes, *Mathématiques, Ecole primaire*, Scérén [CNDP]. (Téléchargeable sur le site du ministère).

[2] *Grandeur, mesure*, Brochure A.P.M.E.P. n° 46, collection Mots, Tome 6, 1982.

[3] ROUCHE N., 1992, *Le sens de la mesure*, Didier Hatier.

[4] ROUCHE N., 1994, Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères - IREM*, n° 15, pp. 25-36.

[5] CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2000, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, n° 55, pp. 5-32.

[6] CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, n° 59, pp. 43-76.

[7] Document Aire et périmètre, téléchargeable sur le site du ministère, à la rubrique "dispositifs relais".

[8] WHITNEY H., 1968, The mathematics of physical quantities, part I : Mathematical models for measurement, *The Americain Mathematical Monthly*.

[9] ROGALSKI M., avec ROBERT A., POUYANNE N. (2001), *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*, Paris : Ellipses.

[10] BOLTIANSKII, V. (1978) *Hilbert's third problem*, New York : John Wiley & Sons.

[11] LEBESGUE, H. (1975) *La mesure des grandeurs*, Paris : Librairie Albert Blanchard.

[12] WHITNEY H., 1968, The mathematics of physical quantities, part II : Quantity structures and dimensional analysis, , *The Americain Mathematical Monthly*.

[13] GOBLOT R., (1998) *Agrégation de mathématiques, Thèmes de géométrie*, Paris : Masson.

[14] PERRIN D., 2005, *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*, Cassini, Paris.

Annexe 1
Les aires avec les mesures

Le rapide exposé qui suit est tiré de Boltianskii [10].
On considère un carré C, le réseau plan R construit à partir de C (niveau 0), et une partie F bornée du plan. On désigne par a_0 le nombre de carrés du réseau R formés entièrement de points de F, et par b_0 le nombre de carrés du réseau R dont certains points appartiennent à F. Puis on subdivise chaque carré de R en 100 carrés de même côté : on obtient ainsi le réseau R_1 (niveau 1), et on recommence indéfiniment … On définit alors les réseaux R_k (niveau k) pour tout entier naturel k. Au niveau k, a_k désignant le nombre de carrés du réseau R_k formés entièrement de points de F, et b_k celui de carrés du réseau R_k dont certains points appartiennent à F, on a alors :

$$a_0 \leq \frac{a_1}{10^2} \leq \frac{a_2}{10^4} \leq \ldots \leq \frac{a_k}{10^{2k}} \leq \ldots \leq \frac{b_k}{10^{2k}} \leq \ldots \leq \frac{b_2}{10^4} \leq \frac{b_1}{10^2} \leq b_0$$

On dit que F est quarrable si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n - a_n}{10^{2n}} = 0$. On définit ainsi une application s qui associe à chaque figure quarrable F du plan un nombre réel $s(F)$, appelé “aire de F”, qui a les propriétés suivantes :
(α) La fonction s est positive.
(β) s est additive : si F et F' sont deux figures quarrables n’ayant pas de points intérieurs en commun, $s(F \cup F') = s(F) + s(F')$.
(γ) s est invariante par translation.
(δ) s est normalisée : $s(Q) = 1$, Q désignant un carré du réseau initial R.

On peut alors démontrer que tout polygone est quarrable. On peut également établir le résultat suivant, qui permet de définir axiomatiquement l’aire, sans recourir aux réseaux précédents ; on a seulement besoin d’un carré unité (qui est fixé) : il *existe une fonction s et une seule* définie sur l’ensemble des polygones qui satisfait les conditions (α),(β),(γ) et (δ).

On peut par ailleurs établir les propriétés de l’aire dont certaines sont admises dans l'enseignement.

(α^*) s est croissante. En remplaçant (α),(β),(γ), (δ) par (α^*),(β),(γ) et (δ) on obtient un système d’axiomes équivalent.

Quelles que soient les figures quarrables F et F', $s(F \cup F') = s(F) + s(F') - s(F \cap F')$.

L’aire d’un rectangle est égale à ab, produit des mesures des longueurs de ses côtés, l’unité de longueur étant la longueur du côté d’un carré du réseau initial.

(γ^*) s est invariante par déplacement.

s ne change pas si l’on remplace le carré initial par un carré isométrique (d’où l’invariance de s par rapport au déplacement du réseau initial).

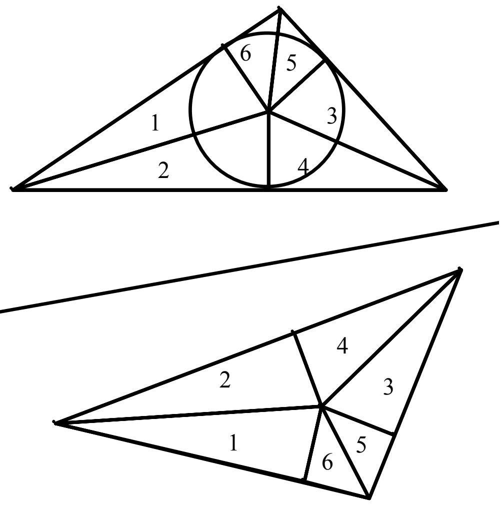
Si F est quarrable et f est une similitude de rapport k, $f(F)$ est quarrable et
$s(f(F)) = k^2\, s(F)$.

L’axiome (α) peut être utilisé pour obtenir des inégalités d’aires, et par passage à la limite des égalités d’aires. Son rôle est fondamental dans la méthode d’exhaustion qui repose sur les résultats suivants :
F étant une figure quarrable, et (G_n) une suite de parties de F telle que l’aire de $F \setminus G_n$ puisse être rendue aussi petite que l’on veut à condition que n soit suffisamment grand, alors $s(F) = \lim\limits_{n \to +\infty} s(G_n)$.
F étant une figure quarrable, et (G_n) une suite de parties de F, et (H_n) une suite de parties contenant F telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} s(H_n - G_n) = 0$, alors $s(F) = \lim\limits_{n \to +\infty} s(G_n)$. Ce dernier résultat est utilisé pour le calcul de l’aire du disque.

Annexe 2

G-équidécomposabilité et importance des symétries centrales

Dans la définition de figures équidécomposables, on exige que pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient “égaux” ou “congruents” , c'est-à-dire qu'il existe une isométrie f_i du plan telle que $f_i(T_i) = T'_i$. On peut augmenter les contraintes sur les transformations f_i. Il convient cependant qu'elles appartiennent à un groupe G, afin que la nouvelle relation d'équidécomposabilité obtenue soit encore une relation d'équivalence. On peut envisager les cas suivants :
G = groupe des isométries planes (noté I) ; G = groupe des déplacements du plan (noté D)
G = groupe engendré par les symétries centrales (noté S) ; G = groupe des translations du plan (noté T).
Deux figures (I-)équidécomposables sont également D-équidécomposables. En effet, un triangle et son symétrique par rapport à une droite sont équidécomposables.

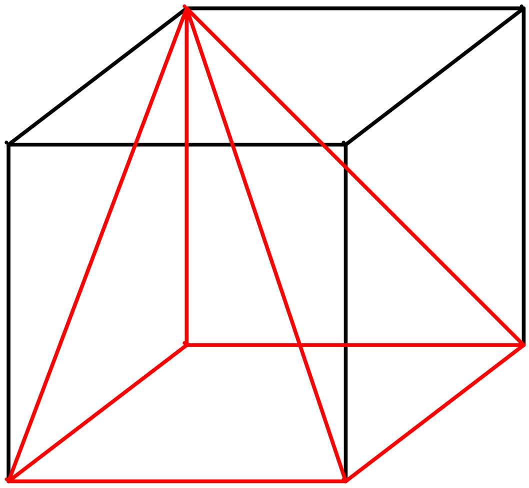


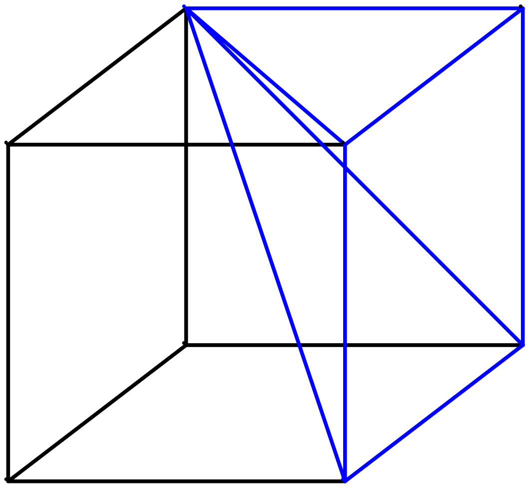
Que se passe-t-il lorsque $G = S$? Peut-on décomposer deux figures de même aire de façon à ce que les pièces correspondantes aient des côtés parallèles deux à deux ? La réponse est affirmative. Ce résultat, démontré par les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur en 1951, est assez surprenant. Ainsi deux carrés de même aire non translatés l'un de l'autre sont S-équidécomposables (Voir Rogalski [9], pour une solution, page 235-237). Hadwiger et Glur ont également démontré que S est le plus petit sous-groupe G du groupe des isométries pour lequel il y a équivalence entre avoir même aire (au sens de la mesure) et être G-équidécomposable.

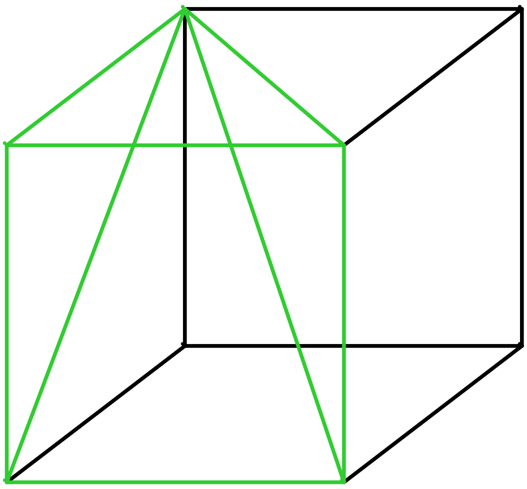
On trouvera une démonstration du théorème de Bolyai-Gerwien (dans lequel G est égal à I) dans [14], pages 223 à 227, démonstration que l'on peut adapter pour obtenir celle du résultat de Hadwiger et Glur (dans lequel $G = S$). Une animation relative au théorème de Bolyai-Gerwien est présentée à l'adresse suivante : http://www.mathkang.com/swf/PLOYGO/.

Annexe 3

Justification[36] de la formule donnant le volume du cône ou de la pyramide







Ce cube est constitué de trois pyramides identiques (donc de même volume).
Le volume V de chacune d'elles est donc le tiers de celui du cube.

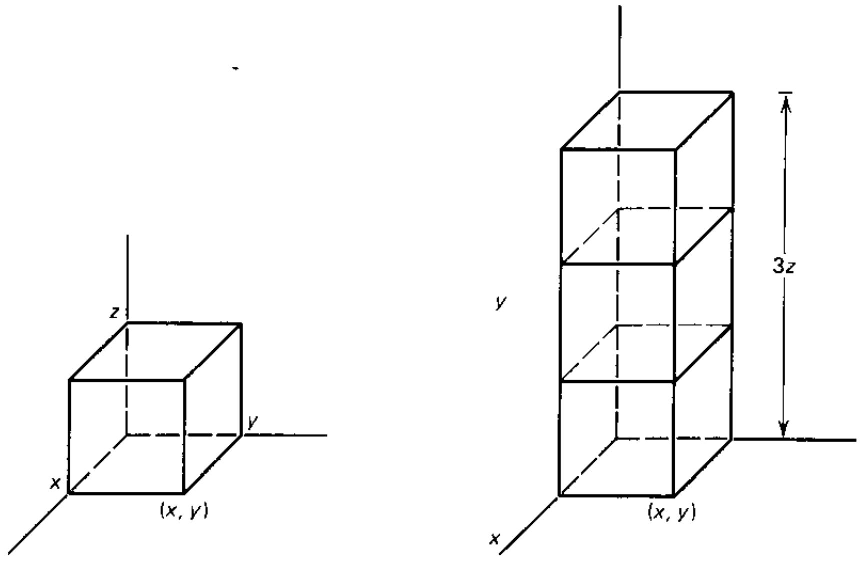
Si a désigne la longueur de l'arête du cube (ou sa mesure avec une unité fixée), $V = \frac{1}{3}a^3$.
Or la base carrée B de chacune de ces pyramides a pour aire a^2 et la hauteur h relative à cette base carrée est égale à a. Donc $V = \frac{1}{3}Bh$.

On se propose de justifier que cette formule, obtenue dans un cas particulier de pyramide, est vraie dans tous les cas, ainsi que pour les cônes.

[36] Adaptée à partir de celle figurant dans l'ouvrage de S. Lang et G. Murrow, *Geometry*, Springer, réimpression en 1997.

On s'appuie pour cela sur deux "principes" dont la démonstration rigoureuse est difficile, mais que l'on peut rendre plausibles de la manière suivante.

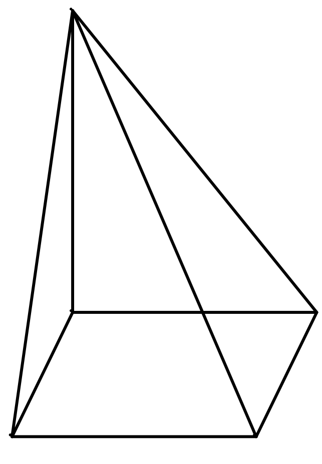
Pour le premier principe :



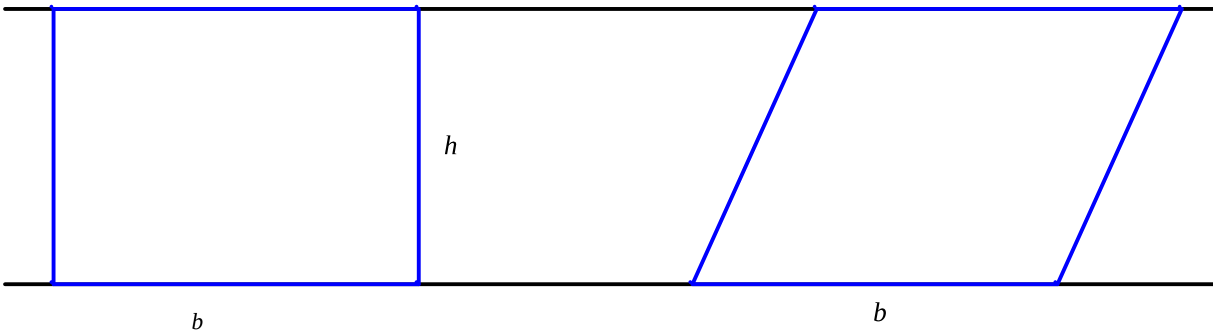
(a) (b)

On considère trois directions deux à deux perpendiculaires dans l'espace (celles des axes d'un repère O*xyz* par exemple).
Si on "dilate" le solide de la figure (a) d'un facteur 3 dans la direction Oz, son volume est multiplié par 3 - Voir la figure (b).
En approximant un solide quelconque *S* de l'espace à l'aide de parallélépipèdes, on peut démontrer (et nous l'admettrons ici) que si on fait subir une "dilatation" d'un facteur *k* dans la direction Oz à un tel solide, le volume du solide *S'* ainsi obtenu est également multiplié par *k*.

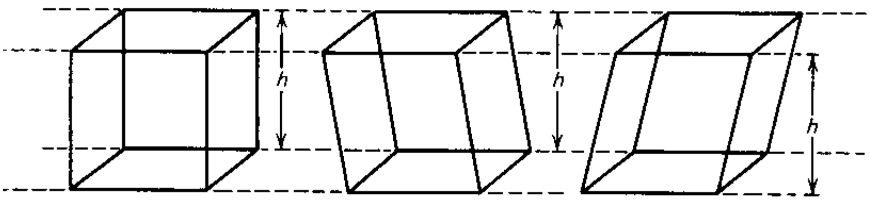
Appliquons ce principe à la première pyramide ci-dessus. Le volume de la pyramide obtenue après "dilatation" est *kV*, c'est-à-dire : $\frac{1}{3}a^3k$. Mais la base *B'* de cette nouvelle pyramide est toujours a^2 et sa hauteur *h'* est *ka*, de sorte que l'expression de son volume est encore $\frac{1}{3}B'\,h'$.
La formule est donc valable pour les pyramides à base carrée comme la première pyramide, quelle que soit leur hauteur :



Faisons maintenant intervenir le deuxième principe. Ce principe est la généralisation à l'espace d'un résultat de géométrie plane bien connu.

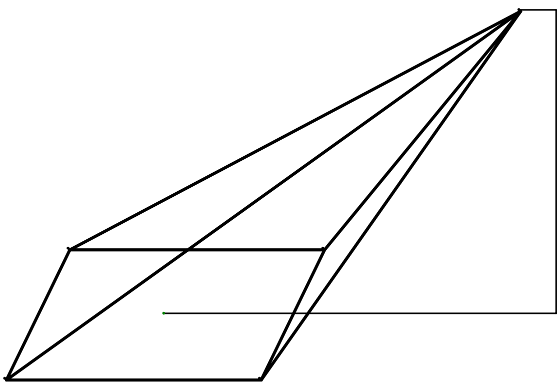


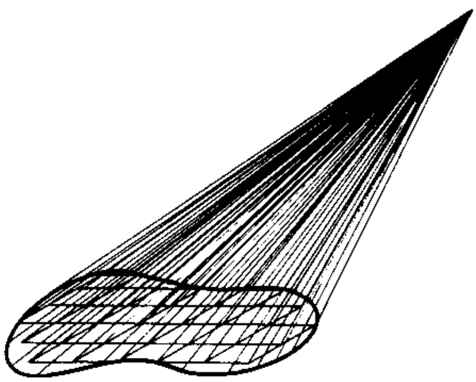
Le parallélogramme, dont la base a même longueur que le rectangle et dont la hauteur est égale à la largeur du rectangle a même aire que ce rectangle.



Dans l'espace, les deux prismes situés à droite ont même base que le parallélépipède rectangle à gauche : ils ont donc le même volume que lui, en vertu de ce deuxième principe (que nous admettons ici sans le démontrer rigoureusement). L'illustration ci-dessous avec le même jeu de cartes dans deux dispositions suggère que les prismes qu'elles concrétisent ont le même volume.

En appliquant le deuxième principe à une pyramide de base carrée envisagée à l'étape précédente, on en déduit que la formule donnant son volume est vraie pour toutes les pyramides à base carrée, par exemple celle figurant à gauche ci-dessous :





En approximant une base quelconque avec des carrés (figure de droite), on devine que la formule demeure vraie dans le cas général, aussi bien pour les pyramides que pour les cônes.

Annexe 4

Emploi effectif de grandeurs dans des manuels scolaires de pays voisins

Aufgabe 1

Zur Verpackung von Lebkuchen benutzt eine Firma Kartons mit einer sechseckigen (regelmäßigen) Grundfläche.

a) Es soll ein Papiermodell hergestellt werden. Fertige dazu ein Netz des Prismas an.

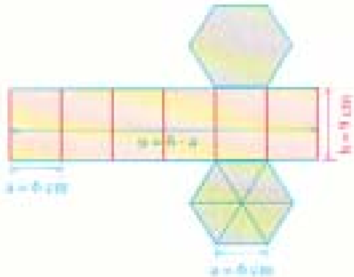
b) Berechne den Materialbedarf (ohne Verschnitt); stelle zunächst eine Formel auf.

c) Berechne das Volumen des Prismas.

Lösung

Der Pappkarton hat die Form eines Prismas.

a) Das Netz des Prismas besteht aus der Mantelfläche (6 Rechtecke mit den Seitenlängen a = 6 cm und h = 9 cm) und den beiden sechseckigen Grundflächen. Jede Grundfläche läßt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a = 6 cm zerlegen.



b) (1) *Größe der Mantelfläche*

$M = u \cdot h$

$M = 6 \cdot 6\text{ cm} \cdot 9\text{ cm}$

$M = 324\text{ cm}^2$

(2) *Größe einer Grundfläche*

$G = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$G = 6 \cdot \frac{(6\text{ cm})^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$G \approx 93{,}53\text{ cm}^2$

(3) *Größe der Oberfläche*

$O = 2 \cdot G + M$

$O \approx 2 \cdot 93{,}53\text{ cm}^2 + 324\text{ cm}^2$

$O \approx 511{,}1\text{ cm}^2$

Ergebnis: Man benötigt ungefähr 512 cm² Pappe.

c) Für das Volumen V gilt:

$V = G \cdot h$

$V \approx 93{,}5\text{ cm}^2 \cdot 9\text{ cm}$

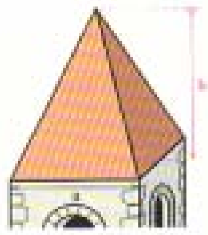
$V \approx 841{,}5\text{ cm}^3$

Ergebnis: Das Volumen des Kartons beträgt ungefähr 842 cm³.

Calcul d'aires, de volumes avec les grandeurs

Aufgabe 1

Der quadratische Turm einer Kapelle soll ein 8 m hohes pyramidenförmiges Dach erhalten. Die Grundkante des Turmes ist 6 m lang.
Wieviel m² Kupferblech müssen bestellt werden?



Lösung

Die Dachfläche ist die Mantelfläche der Pyramide; die Mantelfläche besteht aus vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a = 6 m und der Höhe h_s.

(1) *Berechnen der Höhe h_s einer Seitenfläche*

Nach dem Satz von Pythagoras gilt für das grüne Dreieck:

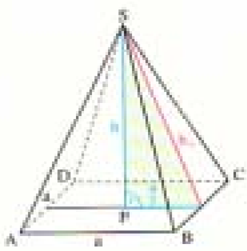
$h_s^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (8\text{ m})^2 + (3\text{ m})^2 = 73\text{ m}^2$

$h_s = \sqrt{73\text{ m}^2} \approx 8{,}54\text{ m}$

(2) *Berechnen der Größe M der Mantelfläche*

$M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s \approx 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\text{ m} \cdot 8{,}54\text{ m} \approx 102{,}48\text{ m}^2$

Ergebnis: Es müssen 103 m² Kupferblech bestellt werden.



Calcul d'une longueur en utilisant le théorème de Pythagore

(4) Sinus, Kosinus und Tangens eines spitzen Winkels

Definition

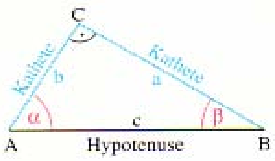
In jedem *rechtwinkligen Dreieck* gilt:

(1) Das Längenverhältnis aus der Gegenkathete eines spitzen Winkels und der Hypotenuse nennt man den **Sinus** dieses Winkels:

Sinus eines Winkels $= \dfrac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

Beispiel: Für das Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$



(2) Das Längenverhältnis aus der Ankathete eines spitzen Winkels und der Hypotenuse nennt man **Kosinus** dieses Winkels.

Kosinus eines Winkels $= \dfrac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

Beispiel: Für das Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt:

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$

(3) Das Längenverhältnis aus Gegenkathete und Ankathete eines spitzen Winkels nennt man den **Tangens** dieses Winkels.

Tangens eines Winkels $= \dfrac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$

Beispiel: Für das Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt:

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\tan\beta = \frac{b}{a}$

Für Aufgabe 1 von Seite 158 gilt:

$\sin\beta = \frac{685\text{ m}}{1421\text{ m}} \approx 0{,}4820548$; $\cos\beta = \frac{1245\text{ m}}{1421\text{ m}} \approx 0{,}8761435$; $\tan\beta = \frac{685\text{ m}}{1245\text{ m}} \approx 0{,}5502008$

Rapports trigonométriques comme rapports de longueurs

(7) Beispiel für die Berechnung eines Winkels mit Hilfe des Kosinussatzes (Fall SSS)

In einem Dreieck ABC sind $a = 5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $c = 6{,}5$ cm gegeben. Berechne γ.

Nach dem Kosinussatz gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Wir isolieren $\cos\gamma$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma \quad |+2ab\cdot\cos\gamma \quad |-c^2$$

$$2ab\cdot\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad |:(2ab)$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Wir setzen ein: $\cos\gamma = \dfrac{(5\text{ cm})^2 + (3{,}5\text{ cm})^2 - (6{,}5\text{ cm})^2}{2\cdot 5\text{ cm}\cdot 3{,}5\text{ cm}} = \dfrac{-5\text{ cm}^2}{35\text{ cm}^2} \approx -0{,}1428571$

Also: $\gamma \approx 98{,}2°$

Rapport trigonométrique comme rapport d'aires

Source : Elemente der Mathematik 10. Schuljahr (Correspond à la classe de 2e) Schroedel Schulbuchverlag

EJEMPLO

Un tren AVE sale de Córdoba hacia Madrid con una velocidad de 220 km/h. Si la distancia por ferrocarril entre Córdoba y Madrid es de 400 km, ¿cuánto tiempo tardará en realizar el trayecto?

Si es t el tiempo, en horas, que tarda en realizar el trayecto:

$$e = v_m \cdot t \rightarrow t = \frac{e}{v_m} = \frac{400\text{ km}}{220\text{ km/h}} = 1{,}82\text{ h} = 1\text{ h }49\text{ min}$$

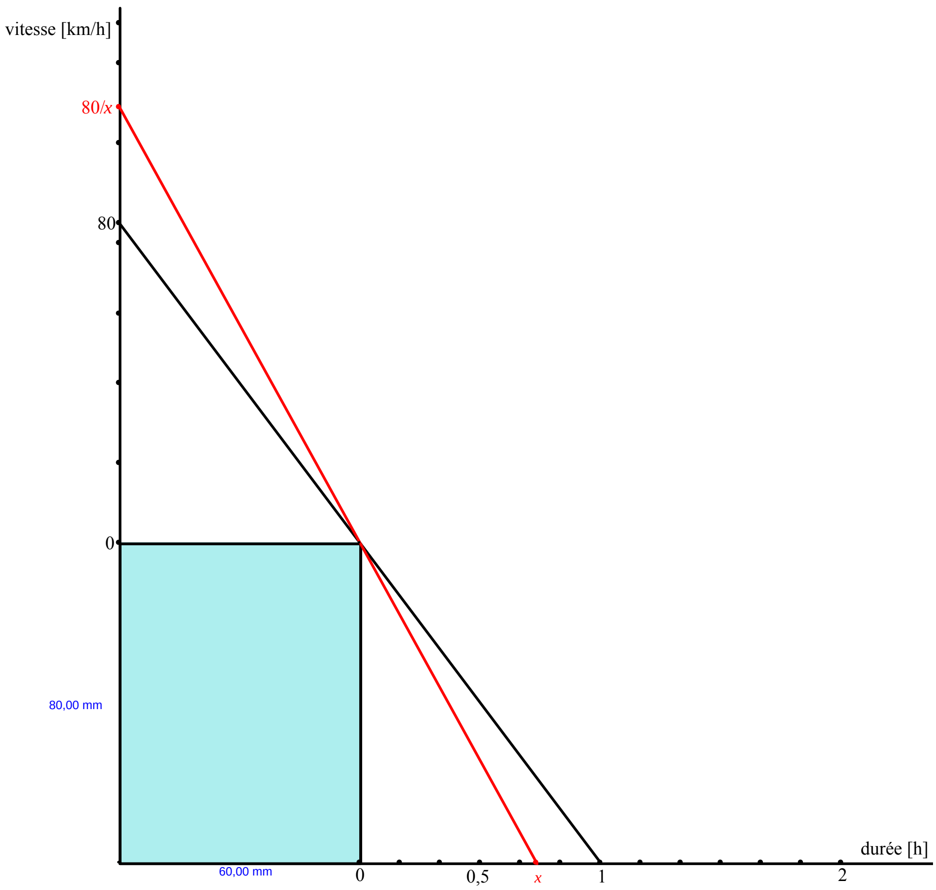
Tardará 1 h 49 min, aproximadamente, en realizar el trayecto.

Calcul de durée comme quotient d'une longueur par une vitesse moyenne

Source : Matemática, Eso: Curso 3 (correspond à la classe de 3e)Edelvives

Annexe 5

Abaque pour « calculer » avec des grandeurs inversement proportionnelles



Cet abaque permet par simple lecture de trouver la durée ou la vitesse moyenne pour une longueur de parcours fixée, ici 80 km. L'aire du rectangle bleu représente géométriquement le produit d'une durée (1 h) par une vitesse (80 km/h), c'est-à-dire une longueur (80 km). Le choix des unités graphiques est fait pour faciliter la lecture des données et des résultats : (1 mm pour 1 min, et 1 mm pour 1 km/h). La figure ci-dessous suggère une justification, à l'aide de la configuration des parallélogrammes d'Euclide (qui sont ici des rectangles).