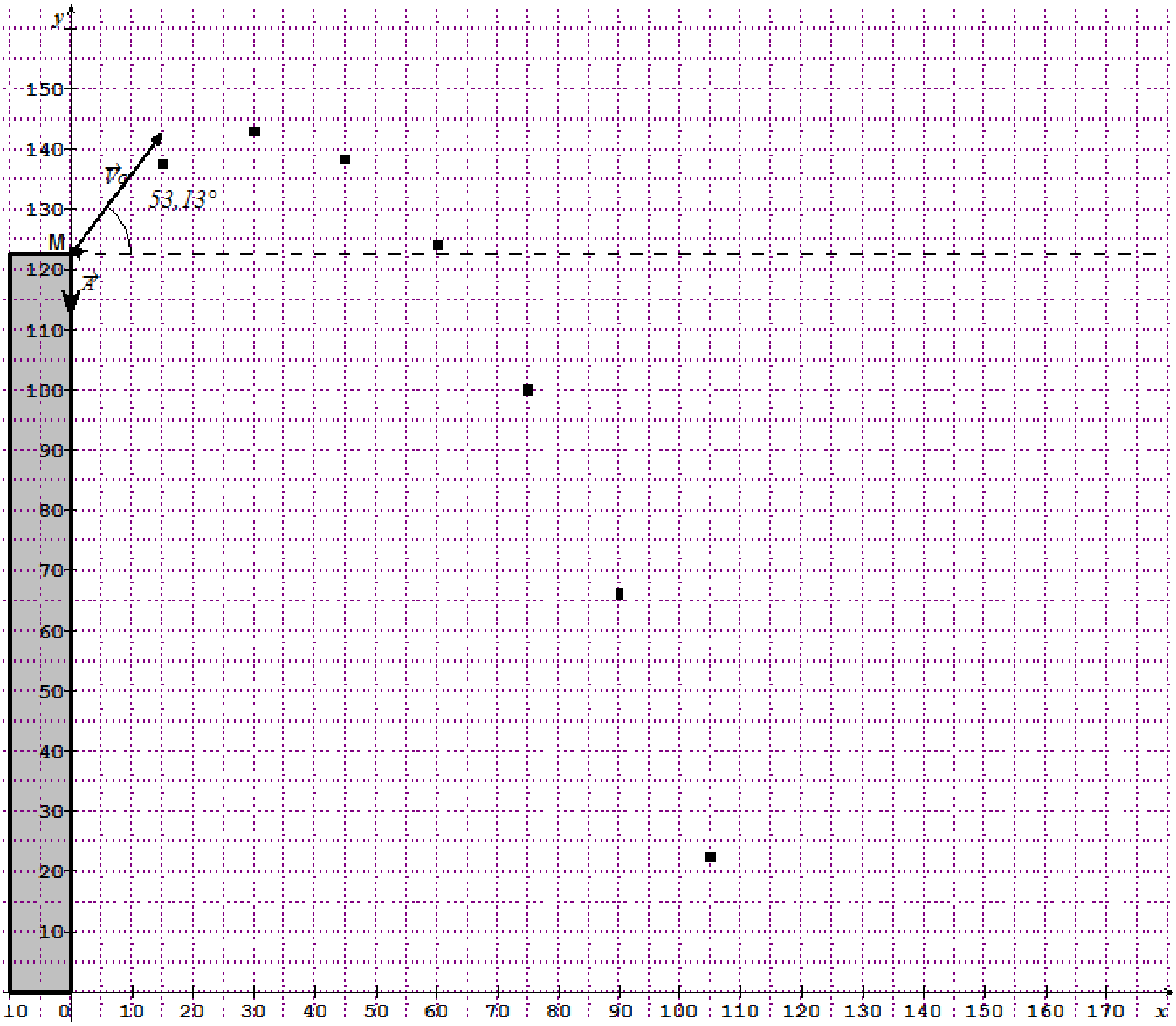
1ère S DM11 – CINEMATIQUE - Chute libre d'un objet soumis à une vitesse initiale

Partie A – Le problème !

1°) La cinématique est l'étude des mouvements en fonction du temps, sans se préoccuper de leurs causes.

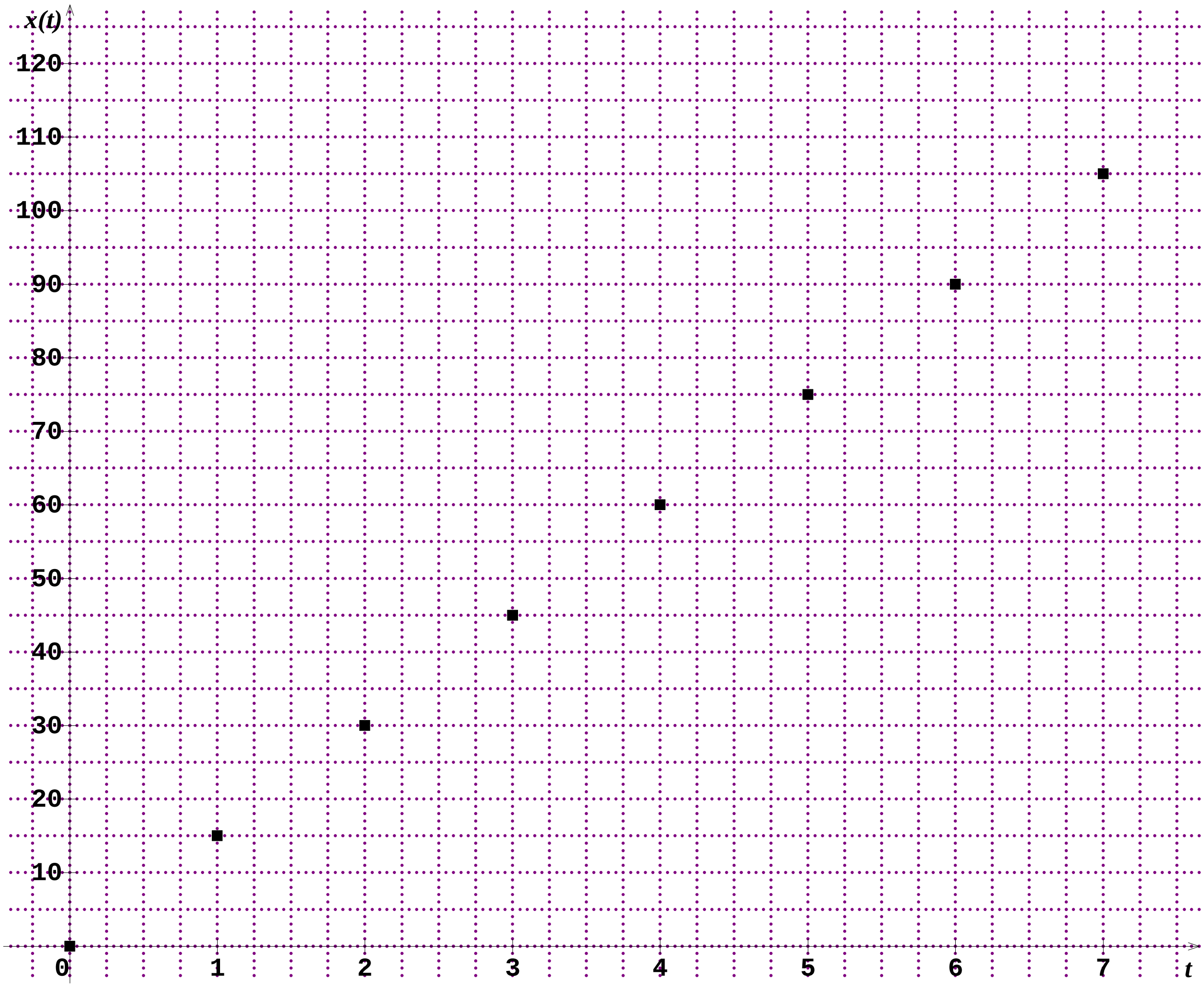
2°)



3°) L'allure de la trajectoire du point M semble être parabolique.

Partie B – Etude du déplacement horizontal de l'objet

1°)



2°) On remarque que les points semblent alignés avec l'origine.

3°) D'après le 2°), on a : $x(t) = mt + p$. Or $m = \frac{Variation\ de\ x}{Variation\ de\ t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 15$ et $p = 0$ d'où : $x(t) = 15t$.

4°) La fonction x étant affine, le taux de variations des images (x) par rapport aux antécédents (t) est constant et vaut 15.

Ainsi, $V_x(t) = 15.$ Par le calcul, $V_x(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{15(t+h)-15t}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{15h}{h} = \lim_{h\to 0} 15 = 15.$

On remarque que la vitesse instantanée horizontale, c'est-à-dire la composante horizontale de la vitesse, est constante.

5°) La vitesse instantanée horizontale étant constante, elle ne subit aucune variation donc l'accélération instantanée horizontale est nulle. Ainsi, $A_x(t) = 0.$

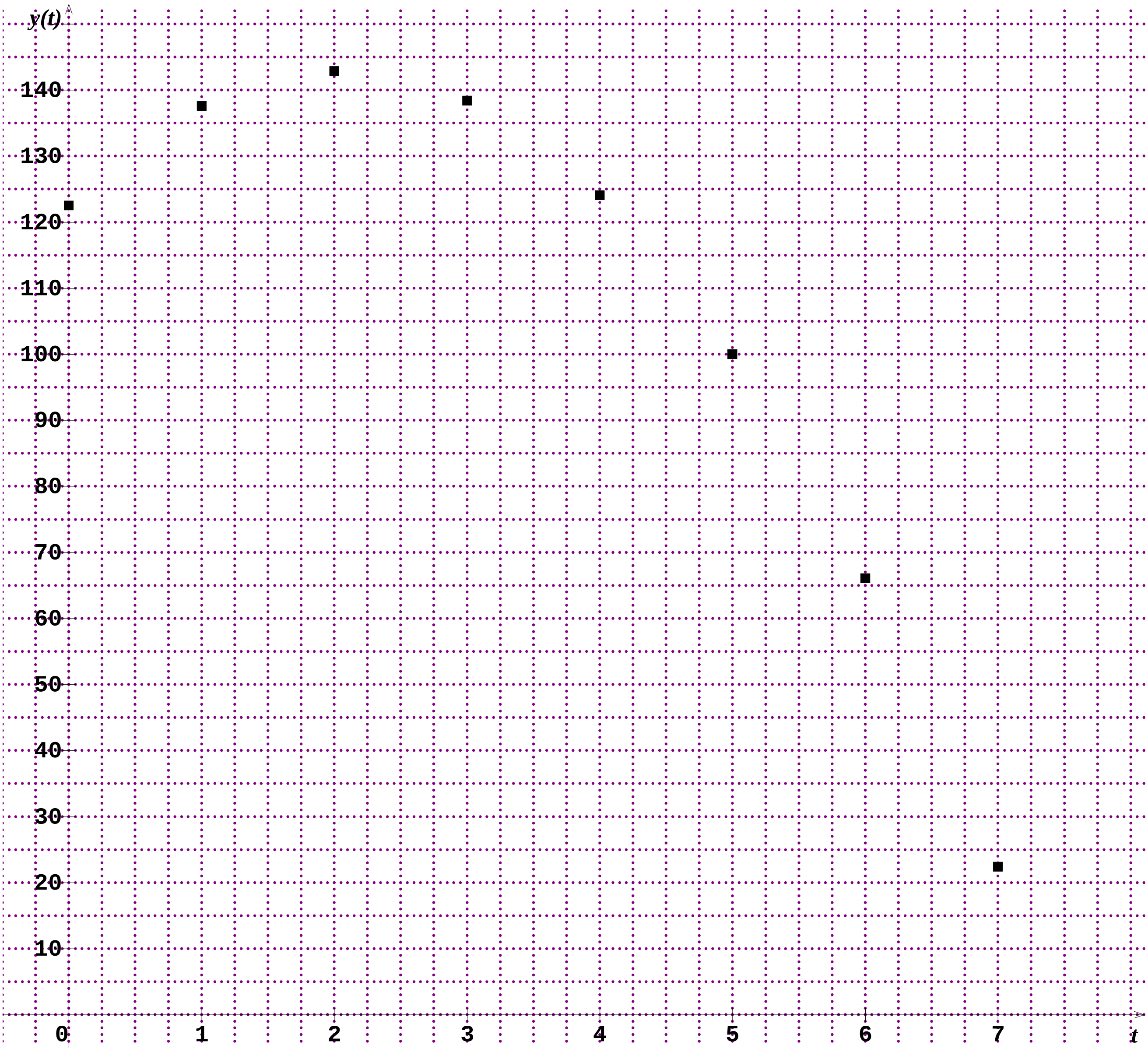
6°) On aurait pu donner cette accélération instantanée horizontale dès le début de l'exercice car il était bien spécifié que, après le lancement, seul le poids d'objet (gravité terrestre, verticale) avait une influence sur le mouvement de l'objet.

7°)

t (en s)	0	1	2	3	4	5	6	7
$x(t)$ en m	0	15	30	45	60	75	90	105
$V_x(t)$ en m/s	15	15	15	15	15	15	15	15
$A_x(t)$ en m/s²	0	0	0	0	0	0	0	0

Partie C – Etude du déplacement vertical de l'objet

1°)



2°) On remarque que les points semblent appartenir à une parabole.

3°) D'après 2°, $y(t) = at^2 + bt + c$. Or l'ordonnée à l'origine vaut 122,5 donc $y(t) = at^2 + bt + 122{,}5$.

On sait, de plus, que si $y(5) = 100$ et que $y(7) = 22{,}4$ par exemple, ceci implique : $a \times 5^2 + b \times 5 + 122{,}5 = 100$

et $a \times 7^2 + b \times 7 + 122{,}5 = 22{,}4$.

Nous devons donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} 25a + 5b = -22{,}5 \\ 49a + 7b = -100{,}1 \end{cases}$. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $\begin{cases} a = -4{,}9 \\ b = 20 \end{cases}$.

Ainsi, $y(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 122{,}5$.

4°) On a : $a = -4{,}9 = \frac{-49}{10}$; $b = 20$ et $c = 122{,}5 = \frac{245}{2}$. On a donc : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-9{,}8} = \frac{100}{49}$. De plus, $\Delta = b^2 - 4ac = 2801$.

Ainsi, $\beta = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{14005}{98}$. On a donc : $y(t) = a(t-\alpha)^2 + \beta = \frac{-49}{10}\left(t - \frac{100}{49}\right)^2 + \frac{14005}{98}$.

Ainsi, la hauteur maximale atteinte par notre objet est égale à $\beta = \frac{14005}{98} \approx 142{,}91$ mètres (au cm près par excès) atteinte à l'instant $\tau = \alpha = \frac{100}{49} \approx 2{,}04\ s$ (au centième de seconde près par défaut).

5°) $V_y(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt}(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-4,9(t+h)^2+20(t+h)+122,5-[-4,9t^2+20t+122,5]}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-4,9h(2t+h)+20h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -4,9(2t+h)+20$

Ainsi, $V_y(t) = -9,8t + 20$. Cette vitesse n'est donc pas constante mais affine en fonction de t.

6°) $V_y(\tau) = -9,8\times\frac{100}{49} + 20 = 0\ m/s$. A l'instant τ, l'objet va cesser de s'élever et entamer sa descente. Sa vitesse instantanée verticale est donc nulle.

7°) La fonction V_y est affine et l'accélération verticale étant égale au taux de variations des images $V_y(t)$ par rapport aux antécédents t, elle est donc constante et égale au coefficient directeur de la fonction V_y. Elle vaut donc -9,8 $m.s^{-2}$.

8°) L'accélération verticale est négative car elle fait diminuer la vitesse verticale qui orientée de manière positive vers le ciel et négative vers le sol.

9°) On aurait pu donner cette accélération instantanée verticale dès le début car il est bien spécifié que l'objet est en chute libre, donc qu'il n'est soumis qu'à l'accélération gravitationnelle terrestre. Or, nous avons dans le T.D. « Chute libre » que celle-ci est, en valeur absolue, approximativement égale à un réel noté $g \approx 9,8\ m/s^2$.

10°)

t (en s)	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(t)$ en m	122,5	137,6	142,9	138,4	124,1	100	66,1	22,4
$V_y(t)$ en m/s	20	10,20	0,40	-9,40	-19,20	-29	-38,8	-48,6
$A_y(t)$ en m/s²	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8

11°) Notre objet va toucher le sol lorsque $y(t) = -4,9t^2 + 20t + 122,5 = 0$.

On a $\Delta = 2801$. La fonction y admet donc deux racines réelles :

$$\theta = t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-\sqrt{2801}}{-9,8} = \frac{20+\sqrt{2801}}{49/5} = \frac{100+5\sqrt{2801}}{49} \approx 7,44\ s$$

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20+\sqrt{2801}}{-9,8} \approx -3,36\ s$. Cette valeur négative ne nous intéresse pas.

Partie D – Déductions possibles des parties précédentes

1°) A l'instant θ, l'objet sera au sol à une distance du pied de la tour égale à $x(\theta) = 15\theta \approx$ 111,619 mètres au mm près par défaut.

2°) On a $x(t) = 15t$ donc $t = x(t)/15$.

Ainsi, comme $y(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 122{,}5$ alors $y(t) = -4{,}9\left(\frac{x(t)}{15}\right)^2 + 20\times\frac{x(t)}{15} + 122{,}5$.

Ainsi, on écrira $y(x) = \frac{49}{2250}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{245}{2}$.

Cette fonction y sera définie pour $x \in [0; x(\theta)]$ soit $x \in [0; 111{,}619]$ c'est-à-dire tant que l'objet est en l'air jusqu'à ce qu'il touche le sol.

3°) $\overrightarrow{V_t}\,(V_x(t) = 15; V_y(t) = -9{,}8t + 20)$. Ainsi, $V_t = \sqrt{15^2 + (-9{,}8t + 20)^2} = \sqrt{96{,}04t^2 - 392t + 625}$.

On a donc $V_0 = \sqrt{625} = 25\ m/s$ soit $25\times\frac{3600}{1000} = 90\,\frac{km}{h}$. Ceci est la vitesse initiale de propulsion de l'objet.

Lorsqu'il atteint le sol, à l'instant θ, sa vitesse est égale à $V_\theta = \sqrt{15^2 + (-9{,}8\theta + 20)^2} = \sqrt{96{,}04\theta^2 - 392\theta + 625}$.

Ainsi $V_\theta \approx 55\,\frac{m}{s}$ au centième de m/s près par défaut. Ainsi, $V_\theta \approx 198\,\frac{km}{h}$ au dixième de km/h près par défaut.

4°) On a un triangle rectangle dans lequel V_0 est l'hypoténuse, $V_x(0)$ le côté adjacent et $V_y(0)$ le côté opposé.

Ainsi, $Cos(\propto) = \frac{V_x(0)}{V_0}$ et $Sin(\propto) = \frac{V_y(0)}{V_0}$ et $Tan(\propto) = \frac{V_y(0)}{V_x(0)}$. Ainsi, $V_0 = \frac{V_x(0)}{Cos(\propto)} = \frac{V_y(0)}{Sin(\propto)}$.

5°) $\overrightarrow{A_t}(A_x(t) = 0\,; A_y(t) = -9{,}8)$ donc $A_t = \sqrt{0^2 + (-9{,}8)^2} = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$.

L'accélération instantanée de l'objet est constante et égale à $9{,}8\,\frac{m}{s^2}$.

Partie E – Question de réflexion – PLUS DIFFICILE !

On a $x(t) = V_x(0)\times t = V_0\times Cos(\alpha)\times t = 25Cos(\alpha)\times t$.

De plus, $y(t) = -4{,}9t^2 + V_0\times Sin(\alpha)\times t + 122{,}5 = -4{,}9t^2 + 25Sin(\alpha)\times t + 122{,}5$.

On veut trouver les valeurs de t et de α pour que $x(t) = 100$ et $y(t) = 0$.

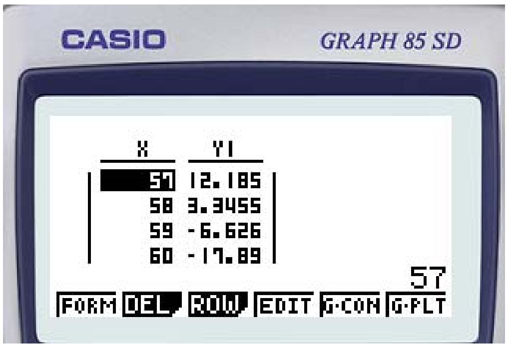
Ainsi $x(t) = 100 \Leftrightarrow 25Cos(\alpha)\times t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{4}{Cos(\alpha)}$.

De plus, $y(t) = 0$ donc $y\left(\frac{4}{Cos(\alpha)}\right) = 0 \Leftrightarrow -4{,}9\left(\frac{4}{Cos(\alpha)}\right)^2 + 25Sin(\alpha)\times\frac{4}{Cos(\alpha)} + 122{,}5 = 0$.

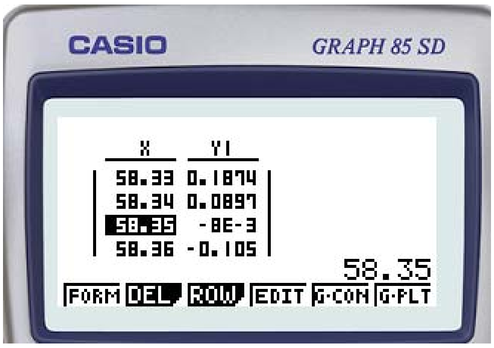
Ainsi, $\frac{-78{,}4}{Cos^2(\alpha)} + 100\times Tan(\alpha) + 122{,}5 = 0$.

En programmant cette fonction de α dans la calculatrice et en faisant un tableau de valeurs (en Mode Degré), on obtient :

On est dans le menu TABLE : Y1=-78.4/(COS X)^2+100*TAN X+122.5.



puis



Il suffit donc d'orienter le canon à approximativement 58,35° et le tour sera joué !

On aura alors $x(t) = 25Cos(\alpha)\times t \approx 13{,}118t$ et $y(t) = -4{,}9t^2 + 25Sin(\alpha)\times t + 122{,}5 \approx -4{,}9t^2 + 21{,}282t + 122{,}5$.

Le temps mis par l'objet pour atteindre sa cible sera approximativement égal à $\frac{100}{13{,}118} \sim 7{,}62\ s$.

Partie F – Un peu de culture ne fait pas de mal !

Les conditions de la chute libre sur la lune sont totalement respectées car on est dans le vide (pas d'atmosphère) et donc seule la gravitation lunaire agit sur les objets. Ceci nous permet de constater, grâce à l'expérience faite par l'astronaute, que deux objets de masses différentes lâchés au même instant « atterrissent » (ici, ils « alunissent » !) en même temps.

Ceci un principe initialement énoncé par Galileo Galilei dit **Galilée** au $16^{\text{ème}}$ siècle : « Dans le vide, tous les objets volent à la même vitesse ».