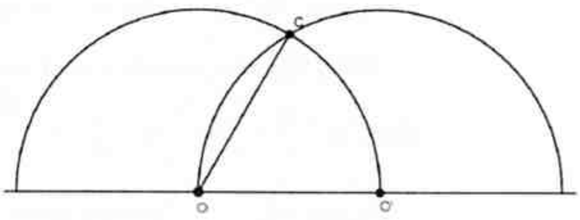
Eléments de correction

1) L'aire demandée en cm² est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.45^2 - \pi.15^2\right) = \frac{\pi}{2}15^2\left(3^2-1\right) = 4\pi.15^2 = 900\pi$ soit en valeur approchée 2827 cm².

2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$A_1 = \frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.

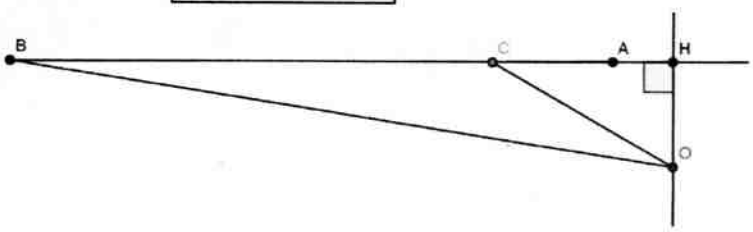
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2\,A_2 - A_1$

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ $\boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3)



a) $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc

$\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H, $OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2$.

Ainsi $OA = OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2\times 30 = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

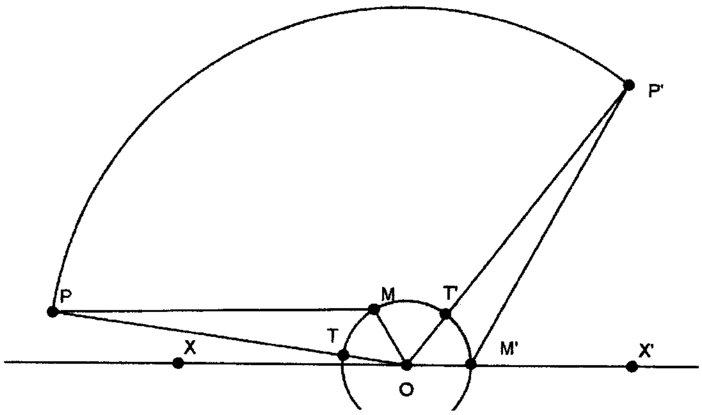
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MP] et [M'P'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{PP'}$. Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTP ont respectivement pour images M' T' P', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par $[MP]$, $[PT]$ et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par $[M'P']$ $[P'T']$ et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments $[PT]$ et $[P'T']$ et les arc de cercle $\widehat{PP'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + (HC + CB)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



.**Eléments de correction**

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.
2. Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!
3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

   $$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2=$$
   $$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+..................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

   d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].
5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$.
   On calcule ensuite :

   $$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

   On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit *n(n-1).*

   Donc n est de la forme $4k$ ou $4k$+1. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

   La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.
   Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice 3 : Éléments de correction

1)

$\boxed{10}$	11	$\boxed{12}$	13	14
15	16	17	$\boxed{18}$	19
$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	22	23	$\boxed{24}$
25	26	$\boxed{27}$	28	29
$\boxed{30}$	31	32	33	34

2) a) 102 est le plus petit nombre sympathique à 3 chiffres et 972 le plus grand.

b) Si N= $\overline{abc}$ un nombre sympathique à 3 chiffres avec $a + b + c = 6$ alors N est divisible par 6 donc par 2, d'où c est pair. De plus a, b et c sont distincts deux à deux, et

$6 = 0 + 1 + 5 = 0 + 2 + 4 = 1 + 2 + 3$ sont les seules façons d'obtenir 6 avec cette condition.

Les nombres sympathiques à 3 chiffres dont la somme des chiffres est 6 sont donc :

$\boxed{132, 150, 204, 240, 312, 402, 420, 510}$.

c) Soit $\overline{abc}$ un nombre à 3 chiffres distincts, multiple de 9.

La somme de ses chiffres est alors un multiple de 9.

On a $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, a, b et c sont distincts deux à deux, donc

$0 + 1 + 2 \leq a + b + c \leq 7 + 8 + 9$ soit $3 \leq a + b + c \leq 24$, puis $\boxed{a + b + c = 9 \text{ ou } a + b + c = 18}$.

Tous les nombres dont la somme des chiffres est égale à 9 sont multiples de 9 donc sympathiques. Mais, par exemple 189 est un multiple de 9 sans être un multiple de 18. Il existe donc des nombres dont la somme des chiffres est 18 donc multiple de 9 et qui ne sont pas sympathiques.

3) a) Avec les chiffres 1, 2, 3, 4 :

La somme des chiffres est alors de 1 + 2 + 3 + 4 = 10 donc le nombre devrait être divisible par 10 et donc avoir 0 pour chiffre des unités soit un autre chiffre que 1, 2, 3 ou 4. Ce cas n'est donc pas possible. Impossible.

b) Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 :

La somme des chiffres est alors de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 donc le nombre devrait être divisible par 5 et donc avoir 5 pour chiffre des unités. Il est alors automatiquement sympathique car divisible par 5 et par 3 (somme de ses chiffres 15 est divisible par 3).

Par exemple, le nombre 12345 est sympathique.

c) $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

Donc tout nombre de 10 chiffres distincts est divisible par 9.

Pour qu'il soit divisible par 5, il suffit de prendre 0 ou 5 pour chiffre des unités.

On obtient alors tous les nombres sympathiques de dix chiffres.

Par exemple, le nombre 1234567890 est sympathique.

4) soit $n = \overline{abc}$ un nombre sympathique tel que $\dfrac{n}{(a+b+c)}$ soit le plus grand possible.

On a $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, avec a, b et c distincts deux à deux

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = a + b + c + 9\,(11a + b)$.

D'où $\dfrac{n}{(a+b+c)} = 1 + 9\,\dfrac{11a+b}{a+b+c}$ doit être le plus grand possible.

Donc $\dfrac{11a+b}{a+b+c}$ doit être le plus grand possible, or $a + b + c \geq a + b + 0$ pour tous a, b, c.

d'où $\boxed{c = 0}$ et par conséquent $b \geq 1$.

On a donc $\dfrac{n}{(a+b+c)} = 1 + 9\,\dfrac{11a+b}{a+b} = 1 + 9\,\dfrac{a+b+10a}{a+b} = 10 + \dfrac{90a}{a+b}$.

Donc $\dfrac{90a}{a+b}$ doit être le plus grand possible, or $a + b \geq a + 1$ pour tous a, b, d'où $\boxed{b = 1}$.

Donc $\dfrac{90a}{a+1} = 90 - \dfrac{90}{a+1}$ doit être un entier le plus grand possible avec $2 \leq a \leq 9$, donc $\dfrac{90}{a+1}$ doit être le plus petit possible et donc a le plus grand possible ,d'où $\boxed{a = 9}$

On trouve donc le plus grand quotient lorsque l'on divise 910 par la somme de ses chiffres.

$\boxed{\text{Le plus grand quotient est 91}}$.

Exercice 4 non S éléments de correction

1) Echiquier 5×5.

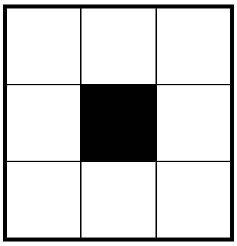
Figure 1 : par exemple, un jeton blanc est en contact avec deux jetons noirs (règle R_3 non respectée).

Figure 2 : toutes les règles sont respectées : disposition possible.

Figure 3 : un jeton noir est en contact avec un autre jeton noir (règle R_2 non respectée).

2) Echiquier 3×3.

Seul cas possible :



3) Echiquier 7×7.

a) Pour chaque jeton noir en coin, 4 cases sont occupées.

Pour chaque jeton noir en bordure, 6 cases sont occupées.

Pour chaque jeton noir immergé, 9 cases sont occupées.

Toutes les cases sont occupées par un jeton.

D'où $4 \times n + 6 \times p + 9 \times q = 49$.

b) n est un entier compris entre 0 et 4 (inclus).

Si $n = 0$ alors $6p + 9q = 49$ or $6p + 9q$ est divisible par 3 mais pas le nombre 49 donc impossible.

Si $n = 2$ alors $6p + 9q = 41$ or $6p + 9q$ est divisible par 3 mais pas le nombre 41 donc impossible.

Si $n = 3$ alors $6p + 9q = 37$ or $6p + 9q$ est divisible par 3 mais pas le nombre 37 donc impossible.

Donc $n = 1$ ou $n = 4$.

c) Si $n = 1$:

Alors $6p + 9q = 45$ c'est à dire $2p + 3q = 15$.

p et q sont des entiers positifs d'où $0 \leq p \leq 7$ et $0 \leq q \leq 5$ (On peut remarquer que q doit être impair, on peut tracer une droite ou un tableau de valeurs ou tâtonner).

On a $(p ; q) = (0 ; 5)$ ou $(p ; q) = (6 ; 1)$ ou $(p ; q) = (3 ; 3)$.

Si $n = 4$:

Alors $6p + 9q = 33$ c'est à dire $2p + 3q = 11$.

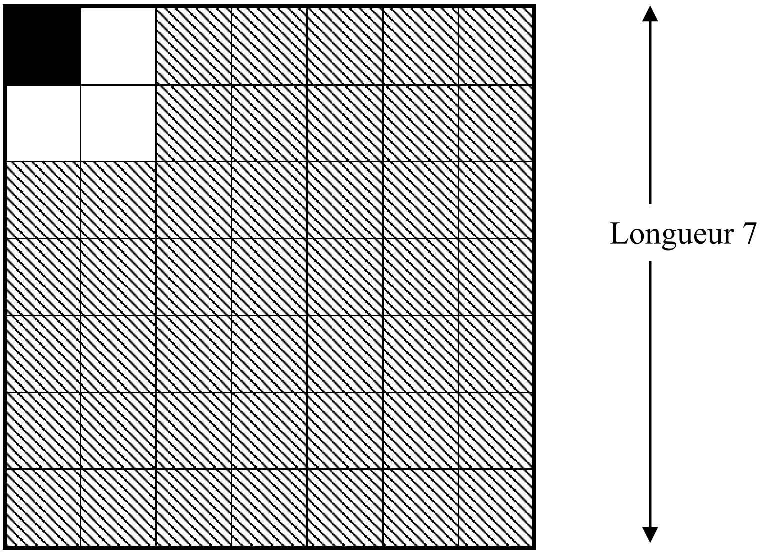
p et q sont des entiers positifs d'où $0 \leq p \leq 5$ et $0 \leq q \leq 3$ (Mêmes remarques).

On a $(p ; q) = (1 ; 3)$ ou $(p ; q) = (4 ; 1)$.

Les triplets possibles sont : (1 ; 0 ; 5), (1 ; 6 ; 1), (1 ; 3 ; 3), (4 ; 1 ; 3) et (4 ; 4 ; 1).

d) 1er cas : $(n ; p ; q) = (1 ; 0 ; 5)$

Après avoir placé le pion noir dans un des coins, on obtient une figure équivalente à :

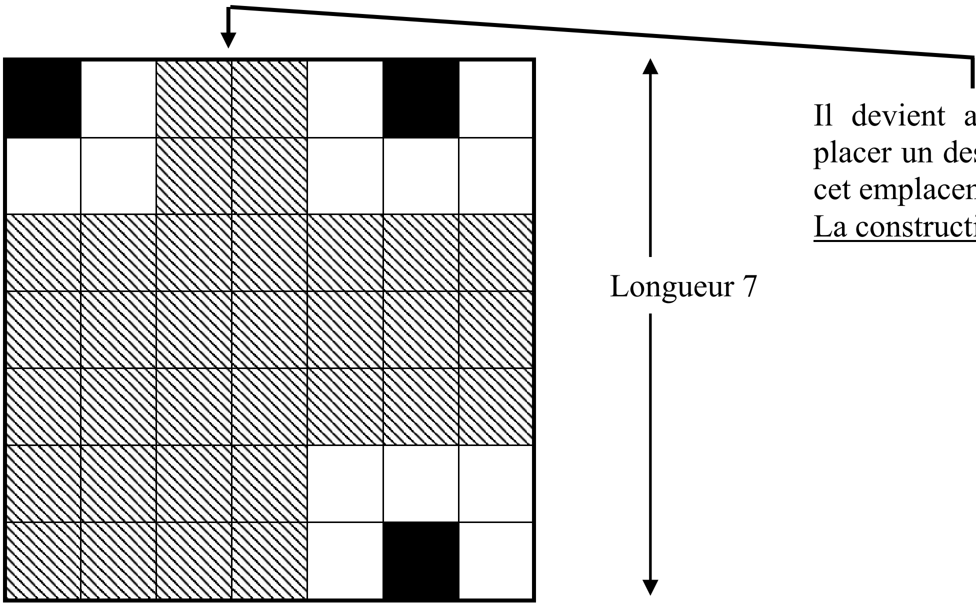


Il ne reste plus que 5 pions noirs immergés à placer, ce qui impose de construire des blocs de longueur 3 (voir la troisième configuration), mais comme 7 n'est pas divisible par 3, la construction est impossible.

2e cas : $(n ; p ; q) = (1 ; 6 ; 1)$

Après avoir placé le pion noir dans un des coins, il ne reste plus que des pions noirs en bordure ou immergés à placer, ce qui impose de construire des blocs de longueur 2 ou 3 (voir la deuxième et la troisième configuration).

La seule décomposition possible du nombre 7 étant $7 = 2 + 2 + 3$, on se trouve dans l'obligation de placer deux jetons noirs en bordure comme indiqué sur la figure :



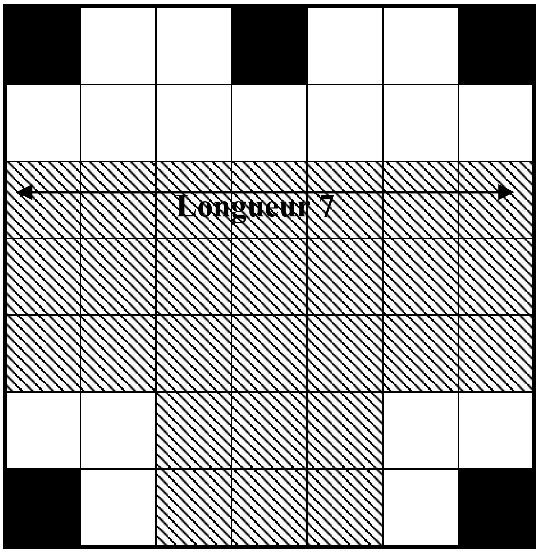
Il devient alors impossible de placer un des blocs qui reste sur cet emplacement.
La construction est impossible.

3e cas : $(n ; p ; q) = (1 ; 3 ; 3)$

Mêmes justifications que le 2e cas.

<u>4^e cas :</u> $(n ; p ; q) = (4 ; 1 ; 3)$

Après avoir placé les 4 pions noirs en coin et le pion noir en bordure, on obtient une figure équivalente à :



Il ne reste plus que 3 pions noirs immergés à placer, ce qui impose de construire des blocs de longueur 3 (voir la troisième configuration), mais comme 7 n'est pas divisible par 3, <u>la construction est impossible</u>.

<u>5^e cas :</u> $(n ; p ; q) = (4 ; 4 ; 1)$

Le seul cas possible – une seule figure possible :