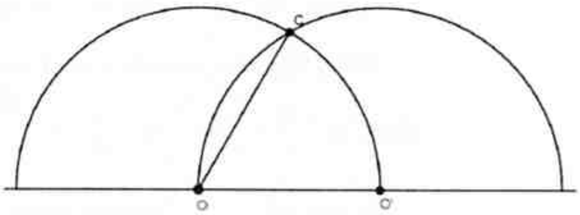
Eléments de correction

1) L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left(\pi.45^2-\pi.15^2\right)=\frac{\pi}{2}15^2\left(3^2-1\right)=4\pi.15^2=900\pi$ soit en valeur approchée 2827 cm^2 .

2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:



$A_1=\frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2=\frac{\pi R^2}{6}$.

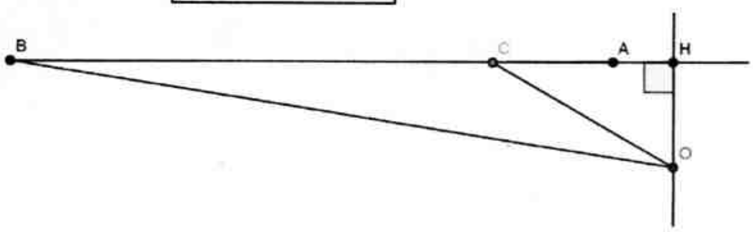
Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\widehat{OC}$ sera : A_2-A_1.
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A=A_2+A_2-A_1=2A_2-A_1$

Donc $A_3=\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$\mathcal{A}=\pi R^2-\left(\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2-\right)=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ $\boxed{\mathcal{A}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3)



a) $\sin\widehat{OCH}=\sin 30°=\frac{1}{2}$ donc

$\frac{OH}{OC}=\frac{1}{2}$ soit $OH=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC=\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H, $OA^2=HA^2+HO^2=\left(HC-CA\right)^2+HO^2=\left(\frac{3}{2}a-a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=a^2$.

Ainsi $OA=OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180-\widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX}=2\times30=60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MP] et [M'P'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{PP'}$. Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTP ont respectivement pour images M' T' P', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par $[MP]$, $[PT]$ et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par $[M'P']$ $[P'T']$ et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.

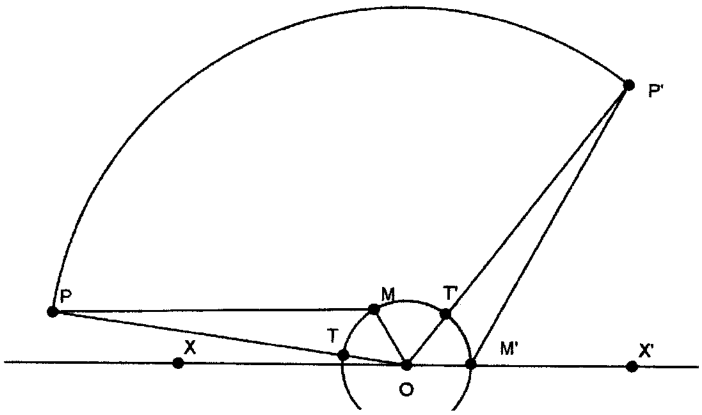
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments $[PT]$ et $[P'T']$ et les arc de cercle $\widehat{PP'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



.**Eléments de correction**

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.
2. Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!
3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2 =$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+.................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

   d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].
5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

   On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.
   Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.
   La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.
   Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice 3 S-STI éléments de correction

1) $x = x^2$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$

2) Terminaisons à un chiffre :
N et N^2 ont la même terminaison à un chiffre.
Il suffit de tester les chiffres de 0 à 9
Conclusion : Terminaisons à un chiffre: 0; 1; 5; 6

3) Terminaisons à deux chiffres :
a) On considère deux nombres finissant par 25 : $100 \times a + 25$ et $100 \times b + 25$ avec a et b deux entiers naturels.
$(100 \times a + 25) \times (100 \times b + 25) = 10\,000\, ab + 2\,500\, a + 2\,500\, b + 625$
$= 100 \times (100\, ab + 25\, a + 25\, b + 6) + 25$ donc le produit finit par 25.

b) Remarques : Le chiffre des unités est à chercher parmi les chiffres donnés dans la question 2).
$N = 100\, a + b$ avec a entier naturel et b entier à **deux chiffres**
$N^2 = 10\,000a^2 + 200ab + b^2$
$N^2 - N = 10\,000a^2 + 200ab + b^2 - 100a - b = 100(100a^2 + 2ab - a) + b^2 - b$
N et N^2 ont la même terminaison à deux chiffres si et seulement si $N^2 - N$ est un multiple de 100
$b^2 - b = b(b - 1)$ est un multiple de 100 c'est à dire de la forme $k\times4\times25 = k\times2^2\times5^2$
On cherche alors b et $b - 1$ tels que le produit donne un multiple de 100
On a donc: $b = 00$
ou $b - 1 = 00$, soit : $b = 01$
$b = 25$ et $b - 1 = 24$
$b = 76$ et $b - 1 = 75$

Conclusion :
N et N^2 ont la même terminaison à deux chiffres pour les nombres N se terminant par 00, 01, 25, 76 .

4) Terminaisons à trois chiffres :
a) $(100\, k + 25)^2 = 10\,000\, k^2 + 5000\, k + 625$.
$= 1000\, (10\, k^2 + 5\, k) + 625$ donc le produit finit par 625 et donc $k = 6$.
b) Par exemple $4625^2 = 21\,390\,625$.
c) Le produit de deux nombres finissant par 000 finit lui aussi par 000.
En utilisant la question 3 b), on obtient comme seules autres terminaisons possibles : k01 et k76.
$(100\, k + 76)^2 = 10\,000\, k^2 + 1\,5200\, k + 5\,776$.
$= 1000\, (10\, k^2 + 15\, k + 5) + 100\, (2\, k + 7) + 76$.
Le chiffre des centaines est donné par le chiffre des unités du nombre $2\, k + 7$.
Tableau de valeurs (calculatrice) : on teste pour k variant de 0 à 9, le chiffre des unités du nombre $2\, k + 7$ pour qu'il soit égal à k.
Seule réponse possible : $k = 3$.

$(100\, k + 01)^2 = 10\,000\, k^2 + 200\, k + 01$
$= 1000\, k^2 + 2\, k \times 100 + 01$
Le chiffre des unités de $2k$ doit être k. Il faut donc $k = 0$

Conclusion : seules terminaisons possibles : 000, 001, 625, 376

5) Exemple de terminaisons à 5 chiffres possibles : 90625 ou 09376.
Si on poursuit l'opération à partir des terminaisons précédentes, on obtient des « nombres » …. 90625 et … 09376 qui ne sont pas des réels mais des nombres décadiques.

6) Cube
On peut déjà affirmer que ceux se terminant par 000, 001, 625 et 376 ont un cube finissant par 000, 001, 625 et 376.
Les terminaisons possibles :
000, 001, 501, 251, 751, 624, 125, 625, 375, 875, 376, 249, 749, 499 et 999.

Exercice 4 S-STI Corrigé

1. Dans le triangle BHO: $\cos 30° = \dfrac{\text{BH}}{1}$, d'où, $\text{BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\text{BC} = \sqrt{3}$.

2.

a. La corde est l'unique perpendiculaire à la droite (OM) passant par M.

b. Dans les triangles OM_iP_i , $P_iM_i^2 = 1 - OM_i^2$

$OM_1^2 = \dfrac{1}{4}$, d'où, $P_1M_1^2 = \dfrac{1}{4}$ et $P_1N_1 = 2P_1M_1 = \sqrt{3} = BC$.

$OM_2^2 < \dfrac{1}{4}$, d'où, $P_2M_2^2 < \dfrac{3}{4}$ et $P_2N_2 = 2P_2M_2$ est supérieur à BC.

$OM_3^2 > \dfrac{1}{4}$, d'où, $P_3M_3^2 < \dfrac{3}{4}$ et $P_3N_3 = 2P_3M_3$ est inférieur à BC.

c. M doit être à l'intérieur ou sur Γ_2 , donc, $p = \dfrac{\pi \times 0{,}5^2}{\pi \times 1^2} = \dfrac{1}{4}$.

3. Cordes et un premier algorithme.

$N_iP_i \geq BC$ ssi $M_i \in [GH]$ ssi $AG \leq AM_i \leq AH$.

a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

$n = 10$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{i}{2} \times 2 \leq \dfrac{3}{2}$ ssi $5 \leq 2i \leq 15$, i prend les valeurs entières de 3 à 7 incluses.

k = 5 Résultat affiché : 0,5

b. On modifie successivement l'algorithme en remplaçant dans l'initialisation, $n = 10$ par : $n = 100$ puis par $n = 1000$, puis par $n = 1\,000\,000$. Quel nombre affichera cet algorithme dans chacun de ces cas ?

$n = 100$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{i}{100} \times 2 \leq \dfrac{3}{2}$ ssi $25 \leq i \leq 75$ d'où : k = 51.

Résultat affiché: 0,51

$n = 1000$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{i}{1000} \times 2 \leq \dfrac{3}{2}$ ssi $250 \leq i \leq 750$ d'où : k = 501.

Résultat affiché: 0,501.

$n = 1000000$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{i}{1000000} \times 2 \leq \dfrac{3}{2}$ ssi $250\,000 \leq i \leq 750\,000$ d'où : k = 500 001.

Résultat affiché: 0,500 001

c. $p = \dfrac{\text{GH}}{\text{AD}} = \dfrac{1}{2}$.

4. Cordes et un second algorithme.

a. $AM_i \geq BC$ ssi $M_i \in \overset{\frown}{BC}$ ssi $60° \leq \widehat{TAM_i} \leq 120°$ ssi $60° \leq \dfrac{i}{100} \times 180 \leq 120°$

ssi $34 \leq i \leq 66$ d'où k = 33 et le résultat affiché est 0,33 .

b. $p = \dfrac{60}{180} = \dfrac{1}{3}$

5. Il faut indiquer avec précision les conditions de l'expérience (choix des cordes..etc.).Les évènements et leur probabilité dépendent de ce choix.