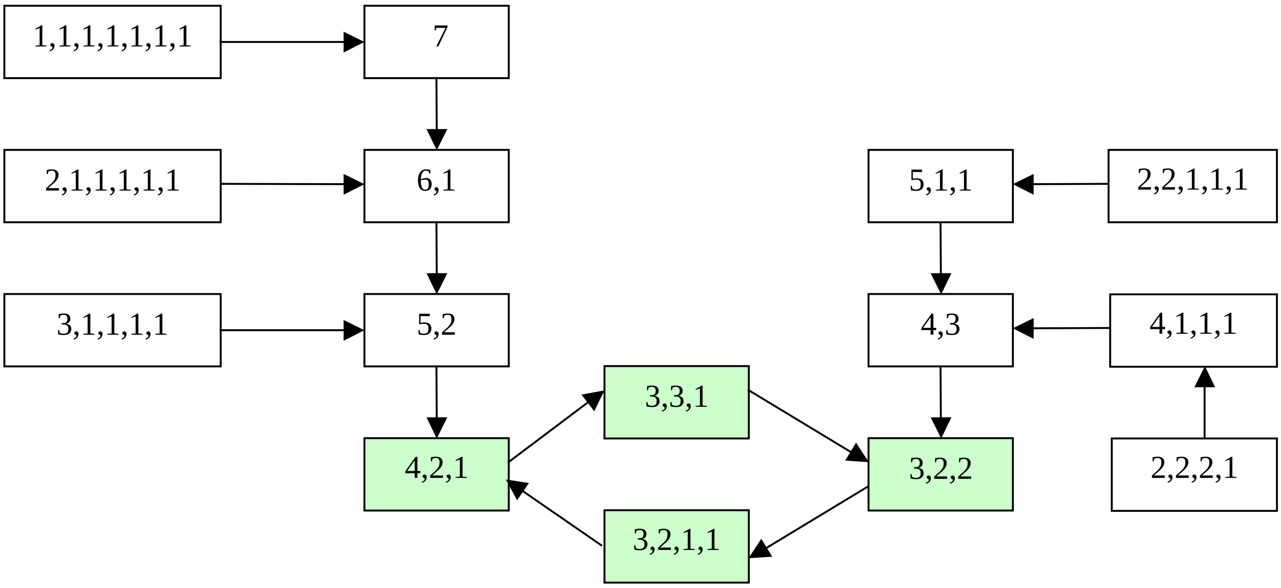
Corrigé du sujet destiné aux candidats des séries S et SI

Exercice 1 :

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1

En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition (4,2,1).

Questions 2 et 3

On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) (1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale (3,3,1) pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2 :

1) De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
DC= AB-AD ; MN=AB-2
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3 :

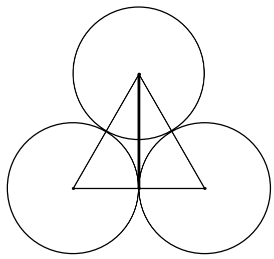
La figure $\mathcal{F}_1$ est transformée en $\mathcal{F}_2$ par une rotation. En effet, soit M un point quelconque de $\mathcal{F}$ puis M_1 et M_2, les symétriques de M par rapport aux droites (OX) et (OY) ; alors $OM = OM_1$ et $OM = OM_2$. De plus, pour M distinct de O, l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM})$ est le double de l'angle $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$ et l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2})$ est le double de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OY})$.

Par conséquent, $OM_1 = OM_2$ et l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ est le double de l'angle $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ qui, lui, est indépendant de M ; la transformation est donc la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$.

L'étude précédente prouve que les droites effacées par Maxime avec les canards passent nécessairement par le point O, centre de rotation transformant $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$. Soit (OX) une droite passant par O, construisons une droite (OY) telle que $2(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ soit l'angle de la rotation. Si $\mathcal{F}$ est la symétrique de $\mathcal{F}_1$ par rapport à (OX), alors $\mathcal{F}_3$, symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à (OY), est bien $\mathcal{F}_2$ (preuve : d'après le début de l'exercice $\mathcal{F}_3$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$, donc $\mathcal{F}_3$ est confondue avec $\mathcal{F}_2$). Ainsi, il y a une infinité de droites répondant à la question posée. On ne peut donc pas retrouver avec certitude les droites tracées par Yasmina. Pour trouver le point O, il est sur toutes les médiatrices des segments $[A_1,A_2]$ où A_1 et A_2 sont deux points homologues sur $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Il suffit de tracer deux telles médiatrices sécantes entre elles.

Pour le dessin 3, l'axe de symétrie entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ passe par I_2 et I_3 , centres des rotations transformant $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_3$. Ces deux centres sont distincts, cet axe de symétrie est parfaitement déterminé ; les deux autres axes se trouvent de façon analogue. Cette fois, il y a unicité, on peut donc affirmer que ce sont les droites tracées par Yasmina.

Exercice 4 :



<u>Première question</u>

- **Condition sur la hauteur :**

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 8,4 cm est $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8,4$ cm.

La hauteur totale de la pyramide composée de n lignes est 4,2 + (n-1)× $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8,4$ + 4,2

soit $\boxed{8,4+(n-1)\times 4,2\times\sqrt{3}}$ (en cm).

La hauteur de la pyramide dépasse 100 cm donc : $8,4+(n-1)\times 4,2\times\sqrt{3}>100$ ce qui équivaut à

$n>1+\frac{91,6}{4,2\times\sqrt{3}}$.

Comme n est un entier naturel on obtient la condition $\boxed{n\geq 14}$.

- **Condition sur le nombre de bouteilles :**

Soit n le nombre de lignes de la première pyramide, le nombre de bouteilles est alors
$1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
Sachant que Célestin a empilé moins de 300 bouteilles, on obtient :
$\frac{n(n+1)}{2}<300$ qui équivaut à $n^2+n-600<0$.
Le trinôme $x^2+x-600$ admet deux racines -25 et 24.
Comme n est un entier naturel on obtient la condition $\boxed{n\leq 23}$.

On a ainsi $\boxed{14\leq n\leq 23}$**.**

- **Condition sur la création de deux nouvelles pyramides de même taille :**

Il faut pouvoir diviser la pyramide en deux pyramides de même forme (de k lignes chacune), donc il faut pouvoir écrire : $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}$, soit $\boxed{\frac{n(n+1)}{2}=k(k+1)}$ ou encore $n(n+1)=2k(k+1)$.
Les entiers k et $k+1$ sont consécutifs donc un des deux est pair, le produit $k(k+1)$ est donc divisible par 2 et par conséquent $2k(k+1)$ est divisible par 4.
Les entiers n et $n+1$ sont eux aussi consécutifs donc un seul des deux est pair et nécessairement divisible par 4 puisque leur produit l'est.

Comme $14\leq n\leq 23$, si n est divisible par 4 alors n est égale à 16 ou 20, si $n+1$ est divisible par 4 alors n est égal à 15 ou 19.

Il y a donc quatre valeurs de *n* à examiner : 15, 16, 19 et 20.

Première méthode :
Soit $N=\frac{n(n+1)}{2}$ le nombre total de bouteilles.
Pour chaque valeur possible de n donc de N, le problème revient à trouver les entiers naturels k, éventuelles solutions de l'équation $\frac{n(n+1)}{2}=k(k+1)$, c'est à dire $N=k(k+1)$ ou encore $k^2+k-N=0$.
Le discriminant $\Delta=1+4N$ est strictement positif, l'équation $x^2+x-N=0$ admet donc deux solutions $\frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}>0$ et $\frac{-1-\sqrt{\Delta}}{2}<0$.
Condition nécessaire : le discriminant $\Delta=1+4N$ doit être le carré d'un entier.

n	15	16	19	**20**
Nombre de bouteilles N	120	136	190	**210**
$\Delta=1+4N$	481	545	761	**841**

$841 = 29^2$
L'équation $x^2+x-210=0$ admet deux solutions entières : -15 et 14 or k est un naturel donc **k = 14, n = 20 et N = 210.**

Deuxième méthode :

A l'aide de la décomposition en facteurs premiers, regarder si $\dfrac{n(n+1)}{2}$ peut s'écrire comme le produit de deux entiers consécutifs $k(k+1)$.

n	15	16	19	**20**
Nombre de bouteilles $\dfrac{n(n+1)}{2}$	120	136	190	**210**
Décomposition en facteurs premiers	$2^3\times 3\times 13$	$2^3\times 17$	$2\times 5\times 19$	$\mathbf{2\times 3\times 5\times 7}$

L'unique solution est pour
***n* = 20**, le nombre de bouteilles est **210** = 14×15 donc ***k* = 14**.

La grande pyramide est formée de 210 bouteilles (qui est bien un nombre inférieur à 300) empilées sur 20 lignes.
Célestin construit ensuite deux pyramides de 105 bouteilles empilées sur 14 lignes.

Deuxième question

La hauteur des deux nouvelles pyramides est $8,4+(k-1)\times 4,2\times\sqrt{3}$ avec $k=14$.
Soit environ 103 cm.

La pyramide obtenue ne remplit donc pas les conditions imposées par le chef.