**Olympiades de Mathématiques 2006 Académie de Nantes**
**Corrigé du sujet L-ES-STI-STG**

## Exercice 1 : les cylindres en papier

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est *h*, le rayon de base *R* et la surface de base *B*, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon *R*, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base *a* qu'on enroulera et de hauteur *b* qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

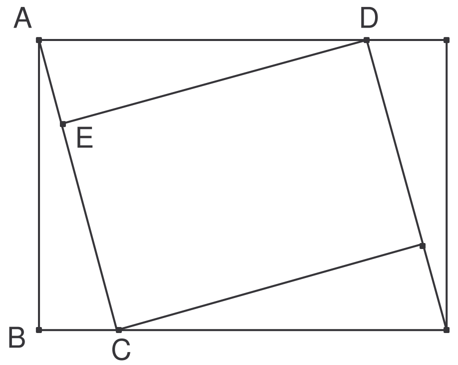
$$a = 2\pi R \text{ d'où } R = \frac{a}{2\pi} \text{ puis } V = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b \text{ soit } \boxed{V = \frac{1}{4\pi}a^2 b}.$$

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29,7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29,7 = L$.
   Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :
   $$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}L^2 l} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi}l^2 L}$$
   Ainsi $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.
   Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

   Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :
   $$a = 29.7 - x = L - x \quad \text{et} \quad b = 21 = l \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l}.$$

   Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de *a* et *b*.




   Or (cf figure) :
   $a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.
   Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

   Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles *ABC* et *DEA* sont semblables.

Il vient : $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$ soit $\dfrac{b}{L-x}=\dfrac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}$ d'où $b=\dfrac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$

On a alors :

$V_1=\dfrac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2+x^2}\right)^2\dfrac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$ soit $\boxed{V_2=\dfrac{1}{4\pi}l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}}$.

Par suite :

$$V_1=V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l=\frac{1}{4\pi}l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}$$

$$\Leftrightarrow (L-x)=\sqrt{l^2+x^2} \qquad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L-x)l$$

$$\Leftrightarrow (L-x)^2=l^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2+x^2-2Lx=l^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2-2Lx=l^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{L^2-l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L=29{,}7$ et $l=21$ : $\boxed{x\simeq 7.426}$.

soit $x\simeq\dfrac{29.7}{4}=7.425$.

Autrement dit <u>il suffit de choisir pour *x* à peu près le quart de la longueur de la feuille</u>.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21\times 29{,}7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L}=\dfrac{L}{l}$ soit $L=l\sqrt{2}$.

mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non $21\times 29.7$ mais $21\times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x=\frac{L^2-l^2}{2L}=\frac{L^2-\frac{L^2}{2}}{2L}=\frac{L^2}{4L} \text{ soit } \boxed{x=\frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$

## <u>Exercice 2 : la fête du vélo</u>

***Première partie***

1) Soit $t_1$ le temps en min mis par Loïc pour parcourir la 1ère partie du trajet, soit $\dfrac{3}{5}x$ si *x* représente la longueur du trajet total en km. $t_1 = 2x$

   Soit $t_2$ le temps en min mis par Loïc pour parcourir la $2^{\text{ième}}$ partie du trajet, soit $\dfrac{2}{5}x$ . $t_2=\dfrac{24}{13}x$

   Loïc parcourt *x* km en $\dfrac{50}{13}x$ min. Sa vitesse est 15,6 km.h$^{-1}$

2) Sur la 2$^{\text{ème}}$ partie du trajet, Fabrice parcourt $\frac{2}{5}\,x$ km en $\frac{5}{6}\,t_2 \; = \; \frac{20}{13}\,x$ min. Sa vitesse est 15,6 km.h$^{-1}$ ; elle est donc égale à la vitesse de Loïc sur tout le trajet.

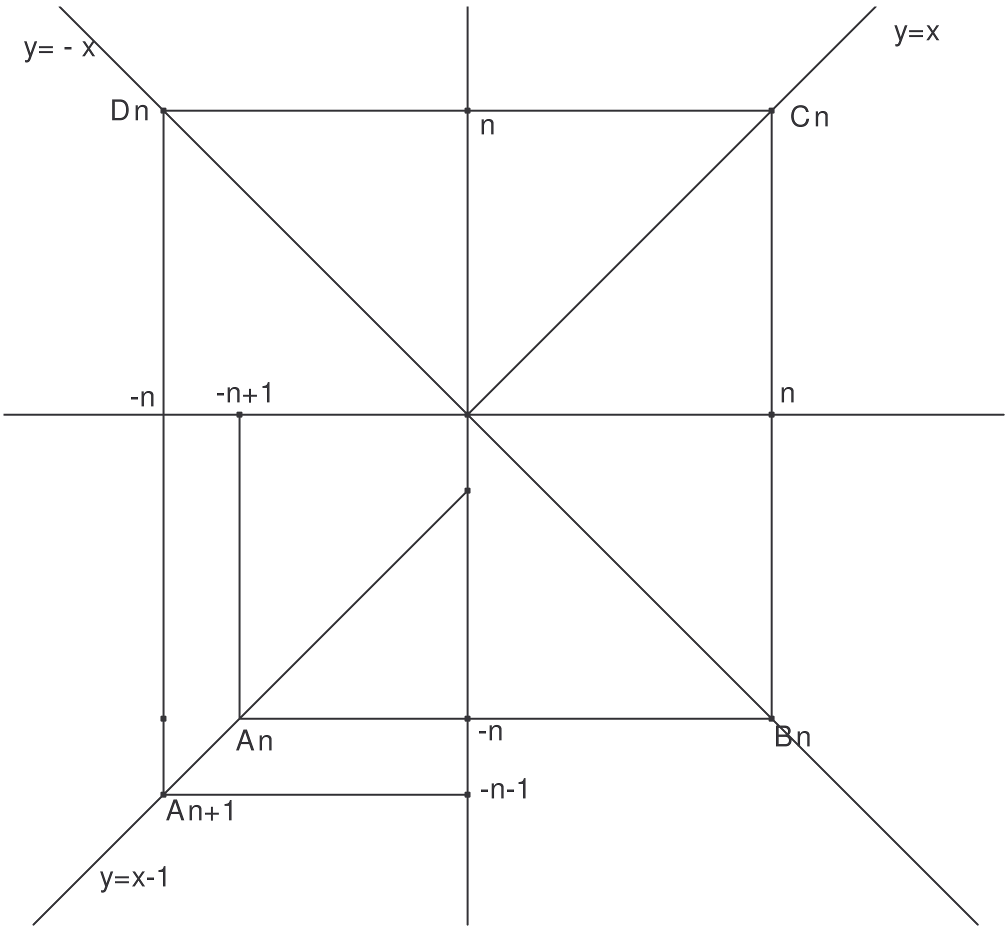
***Deuxième partie :***

En juin 2005 :
$a$ : nombre de participants amateurs ;
$v$ : nombre de participants membres d'un club.
On a : $1{,}08a + 1{,}02v = 1{,}06(a+v)$ soit : $0{,}02a = 0{,}04v$ ou $a = 2v$.

Il y a eu deux fois plus d'amateurs que de membres d'un club ($\frac{2}{3}$ ; $\frac{1}{3}$).

## Exercice 3 : la spirale

Commençons par des considérations générales.




Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites $D_1$, $D_2$ et $D_3$ dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1\ (D_1)$, $y = -x\ (D_2)$ et $y = x\ (D_3)$.

Notons $A_n$ le point de $D_1$ d'ordonnée $-n$ : il a pour coordonnées : $(-n+1,-n)$.

$B_n$ le point de $D_2$ d'ordonnée $-n$ : il a pour coordonnées : $(n,-n)$.

$C_n$ le point de $D_3$ d'ordonnée $n$ : il a pour coordonnées : $(n,n)$.

$D_n$ le point de $D_2$ d'ordonnée $n$ : il a pour coordonnées : $(-n,n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$\left[D_{n-1}A_n\right], \left[A_nB_n\right], \left[B_nC_n\right] \text{ et } \left[C_nD_n\right]$$

de longueurs respectives $2n-1$ , $2n-1$ , $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point $D_0$.

On conjecture facilement que les points $A_n$ et $C_n$ ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$\begin{aligned}
l(A_n) &= OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + \ldots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n \\
&= 1+1+2+2+3+\ldots+(2n-2)+(2n-2)+(2n-1) \\
&= 2.\left(1+2+3+\ldots+(2n-2)\right)+(2n-1)) \\
&= 2.\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}+(2n-1)) = (2n-2)(2n-1)+(2n-1) \\
&= (2n-1)\left((2n-2)+1\right) = (2n-1)^2
\end{aligned}$$

et $l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$

1. Il existe deux points *A* de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse $5$, l'autre d'abscisse $-5$.

   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas : } A(5,0)}$

   Ce point est sur le segment $\left[B_5C_5\right]$ ;

   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.

   Ainsi $l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$.

   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas : } A'(-5,0)}$

   Ce point est sur le segment $\left[D_5A_6\right]$ ($D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$ ;) avec $A'A_6 = 6$.

   Ainsi $l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $\left[C_{2006}D_{2006}\right]$ ;

   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.

   Ainsi $l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.

3. On cherche ici le point *C* tel que $l(C) = 2006$.

   Or, la suite des nombres

   $$l(O) = 0,\ l(A_1) = 1,\ l(C_1) = 4,\ l(A_2) = 9,\ l(C_2) = 16, \ldots,$$
   $$\ldots\ l(A_n) = (2n-1)^2,\ l(C_n) = (2n)^2$$

   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).

Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

$$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$

De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc

$$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$

donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

Enfin : $2006 - 1980 = 26$ donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_c = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$

Donc $C$ a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.

Eliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.

Notons $n = \max(|p|,|q|)$.

$\boxed{\text{Si } n = |p|}$ alors $|q| \leqslant n$ donc $-n \leqslant q \leqslant n$ et $p \in \{-n,n\}$.

Si $p = n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[B_nC_n]$

car $\begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leqslant y_D \leqslant y_{C_n} = n \end{cases}$

Si $p = -n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[D_nA_{n+1}]$

car $\begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leqslant y_D \leqslant y_{D_n} = n \end{cases}$

$\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|,|q|) = n$ :

par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n,n\}$.

Si $q = n$ alors $D(p,n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_nD_n]$

car $\begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$

Si $q = -n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_nB_n]$

car $\begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leqslant x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$

Ainsi <u>dans tous les cas *D* est sur un des segments qui constituent la spirale</u>.

## <u>Exercice 4 : les truites</u>

**Première solution :** (se généralise facilement à plus de 5 pêcheurs)

Soit $i \in \{1;2;3;4;5\}$ et $n_i$ le nombre de truites contenues dans le panier numéro *i*. ($n_i$ n'est pas un multiple de 5 d'après la consigne.)

| Paniers | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ |
| Effectifs cumulés | $n_1$ | $n_1+n_2$ | $n_1+n_2+n_3$ | $n_1+n_2+n_3+n_4$ | $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Restes | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$ |

$r_i$ est le reste de la division de $n_1+n_2+\ldots+n_i$ par 5, on a $r_i \in \{0;1;2;3;4\}$.

- S'il existe *i* tel que $r_i=0$ alors $n_1+n_2+\ldots+n_i$ est multiple de 5. Le pisciculteur répartira le contenu de ces *i* paniers en cinq parts égales et gardera les 5-*i* autres paniers.

- Si pour tout *i* , $r_i \neq 0$ alors $r_i \in \{1;2;3;4\}$. Il y a 5 restes $r_i$ pour 4 valeurs possibles donc au moins deux restes sont égaux (problème des « tiroirs »).

  Supposons que $r_i = r_j$ avec $i<j$.
  On a alors $n_1+n_2+\ldots+n_i = 5q_i + r_i$ et $n_1+n_2+\ldots+n_i+n_{i+1}+\ldots+n_j = 5q_j + r_i$ avec $q_i < q_j$ entiers naturels.

  Par différence on obtient $n_{i+1}+\ldots+n_j = 5(q_j - q_i)$ d'où $n_{i+1}+\ldots+n_j$ est un multiple de 5. Le pisciculteur répartira le contenu de ces *j-i* paniers en cinq parts égales et gardera les 5-(*j-i*) autres paniers.

Les pêcheurs ne rentreront donc jamais bredouilles.
**Deuxième solution :**

Soit $i \in \{1;2;3;4;5\}$ et $n_i$ le nombre de truites contenues dans le panier numéro *i*.

| Paniers | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ |
| Restes | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$ |

$r_i$ est le reste de la division de $n_i$ par 5, on a $r_i \in \{1;2;3;4\}$.( D'après la consigne $n_i$ n'est pas un multiple de 5 donc $r_i \neq 0$ .)

Il y a 5 restes $r_i$ pour 4 valeurs possibles donc au moins **deux restes sont égaux** (problème des « tiroirs »).

On étudie tous les cas possibles avec **au moins** :

deux restes 1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | |
| 1 | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 1 | 2 | 4 | |
| 1 | 1 | 3 | | |
| 1 | 1 | 4 | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 1 | 3 | |
| 1 | 1 | 1 | 4 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

deux restes 2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | | |
| 2 | 2 | 3 | | |
| 2 | 2 | 4 | 1 | |
| 2 | 2 | 4 | 3 | |
| 2 | 2 | 4 | 4 | |
| 2 | 2 | 2 | 1 | |
| 2 | 2 | 2 | 3 | |
| 2 | 2 | 2 | 4 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

deux restes 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 1 | 1 | |
| 3 | 3 | 1 | 2 | |
| 3 | 3 | 1 | 4 | |
| 3 | 3 | 2 | | |
| 3 | 3 | 4 | | |
| 3 | 3 | 3 | 1 | |
| 3 | 3 | 3 | 2 | |
| 3 | 3 | 3 | 4 | |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

deux restes 4

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 1 | | |
| 4 | 4 | 2 | | |
| 4 | 4 | 3 | 1 | |
| 4 | 4 | 3 | 2 | |
| 4 | 4 | 3 | 3 | |
| 4 | 4 | 4 | 1 | |
| 4 | 4 | 4 | 2 | |
| 4 | 4 | 4 | 3 | |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Remarque : Dans chaque cas on arrête la description dès que l'on trouve une somme multiple de 5 (nombres en **gras**).

Dans chacun des cas on peut trouver une somme multiple de 5.

Les pêcheurs ne rentreront donc jamais bredouilles.