Olympiades de Mathématiques 2006 Académie de Nantes
Corrigé du sujet S-SI

Exercice 1 : les cylindres en papier

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est h, le rayon de base R et la surface de base B, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon R, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base a qu'on enroulera et de hauteur b qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

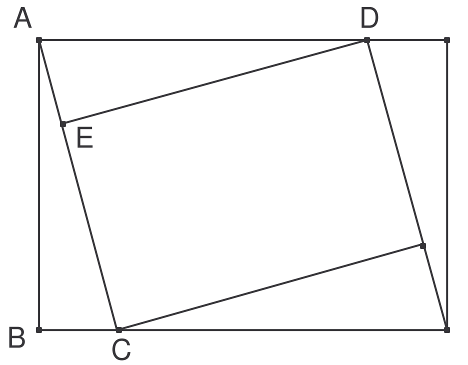
$$a = 2\pi R \text{ d'où } R = \frac{a}{2\pi} \text{ puis } V = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b \text{ soit } \boxed{V = \frac{1}{4\pi}a^2 b}.$$

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29{,}7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29{,}7 = L$.
   Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :
   $$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}L^2 l} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi}l^2 L}$$
   Ainsi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.
   Remarquons qu'<u>il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure</u>.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

   Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :
   $$a = 29.7 - x = L - x \quad \text{et} \quad b = 21 = l \quad \text{d'où } \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}(L-x)^2\, l}.$$

   Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de a et b.



Or (cf figure) :
$a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.
Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles ABC et DEA sont semblables.

Il vient : $\dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ soit $\dfrac{b}{L-x} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}$ d'où $b = \dfrac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$

On a alors :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2+x^2}\right)^2 \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}}.$$

Par suite :

$$V_1 = V_2 \iff \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l = \frac{1}{4\pi} l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}$$

$$\iff (L-x) = \sqrt{l^2+x^2} \qquad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L-x)l$$

$$\iff (L-x)^2 = l^2+x^2$$

$$\iff L^2+x^2-2Lx = l^2+x^2$$

$$\iff L^2-2Lx = l^2$$

$$\iff \boxed{x = \frac{L^2-l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L = 29{,}7$ et $l = 21$: $\boxed{x \simeq 7.426}$.

soit $x \simeq \dfrac{29.7}{4} = 7.425$.

Autrement dit <u>il suffit de choisir pour *x* à peu près le quart de la longueur de la feuille</u>.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21 \times 29{,}7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L} = \dfrac{L}{l}$ soit $L = l\sqrt{2}$.

mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non 21×29.7 mais $21 \times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x = \frac{L^2-l^2}{2L} = \frac{L^2-\frac{L^2}{2}}{2L} = \frac{L^2}{4L} \text{ soit } \boxed{x = \frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$

<u>Exercice 2 : le club de Maths</u>

Question 1

Si le côté vaut *a*, la diagonale mesure $a\sqrt{2}$.

$a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1) = 1$, d'où $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

Question 2

Ludo a raison : $(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$, ce qui est égal au carré du 3ème côté.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le nouveau triangle est rectangle.

Question 3
Je constate que $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$, $1 + 4 = 5$ et $4 – 1 = 3$ il reste à trouver le 4 à partir de 1 et 2
Je constate que $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$, $9 + 4 = 13$ et $9 – 4 = 5$ il reste à trouver le 12 à partir de 2 et 3.
Il suffit de prendre le double produit.

Démonstration à partir de 2 nombres a et b : les nombres obtenus sont $a^2 – b^2$, $a^2 + b^2$, 2ab.
En développant, on montre que $(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2+b^2)^2$ et qu'ainsi ces 3 nombres sont « triangle rectangles en nombres ».

Trois autres :
Avec 3 et 4 : 24, 7, 25   avec 4 et 5 : 40, 9, 41   avec 5 et 6 : 60, 11, 61

Question 4

Analyse :
Soit a et b (avec a >b) deux entiers permettant de former le triangle rectangle en nombres T(2ab ; $a^2 - b^2$; $a^2 + b^2$).

Soit a' et b' (avec a' >b') deux entiers permettant de former le triangle rectangle en nombres T'(2a'b' ; $a'^2 - b'^2$; $a'^2 + b'^2$).

Si T et T' ont la même aire, alors $2ab(a^2 - b^2) = 2a'b'(a'^2 - b'^2)$ soit $ab(a^2 - b^2) = a'b'(a'^2 - b'^2)$.
car il a été précédemment démontré que 2 ab et $a^2 - b^2$ étaient les longueurs des côtés de l'angle droit.
Il faudrait alors trouver deux couples d'entiers (a ;b) et (a' ;b') distincts tels que les produits $ab(a^2 - b^2)$ et $a'b'(a'^2 - b'^2)$ soient les mêmes.

Prenons quelques valeurs pour le couple (a ; b)

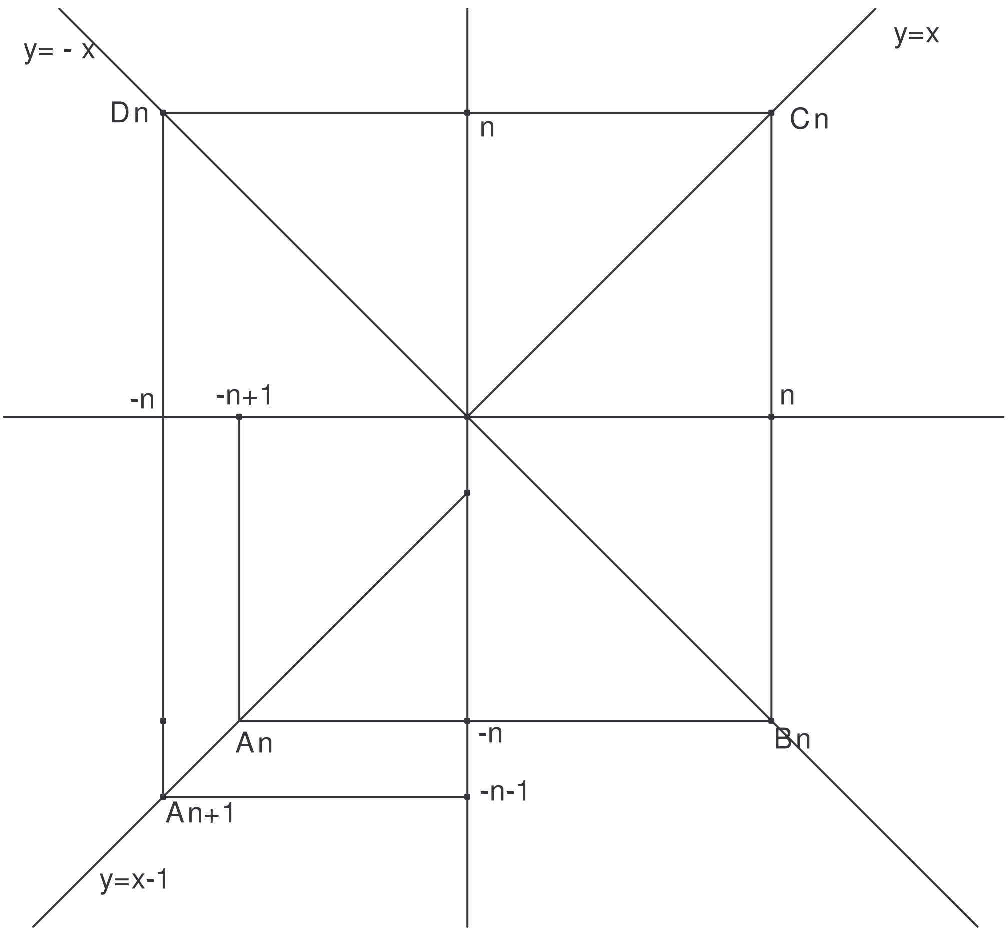
b	a	ab	$a^2 - b^2$	$ab(a^2 - b^2)$
1	2	2	3	6
1	3	3	8	24
1	4	4	15	60
1	5	5	24	120
1	6	6	35	**210**
1	7	7	48	336
2	3	6	5	30
2	4	8	12	96
2	5	10	21	**210**

Les couples (6 ; 1) et (5 ; 2) conviennent. Ils génèrent respectivement les triangles T(12 ; 35 ; 37) et T'(20 ; 21 ; 29).

Synthèse :
Réciproquement, ces deux triangles T et T' sont rectangles en nombre et ont la même aire égale à 210.

Exercice 3 : la spirale

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1 , D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1 \; (D_1)$, $y = -x \; (D_2)$ et $y = x \; (D_3)$.

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n+1, -n)$.

B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.

C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n, n).

D_n le point de D_2 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$\left[D_{n-1}A_n\right], \left[A_nB_n\right], \left[B_nC_n\right] \text{ et } \left[C_nD_n\right]$$

de longueurs respectives $2n-1$, $2n-1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0.

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$l(A_n) = OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + \ldots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n$$

$= 1+1+2+2+3+\ldots+(2n-2)+(2n-2)+(2n-1)$

$= 2.\left(1+2+3+\ldots+(2n-2)\right)+(2n-1))$

$= 2.\dfrac{(2n-2)(2n-1)}{2}+(2n-1)) = (2n-2)(2n-1)+(2n-1)$

$= (2n-1)\left((2n-2)+1\right) = (2n-1)^2$

et $l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$

1. Il existe deux points *A* de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.

   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas : } A(5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$;

   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.

   Ainsi $l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$.

   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas : } A'(-5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ ($D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6 = 6$.

   Ainsi $l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$;

   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.

   Ainsi $l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.

3. On cherche ici le point *C* tel que $l(C) = 2006$.

   Or, la suite des nombres

   $l(O) = 0,\ l(A_1) = 1,\ l(C_1) = 4,\ l(A_2) = 9, l(C_2) = 16, \ldots,$

   $\ldots\ l(A_n) = (2n-1)^2,\ l(C_n) = (2n)^2$

   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).

   Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

   $$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$

   De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc

   $$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$

   donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

   Enfin : $2006 - 1980 = 26$ donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_c = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$

   Donc *C* a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.

   Eliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.

   Notons $n = \max(|p|,|q|)$.

   $\boxed{\text{Si } n = |p|}$ alors $|q| \leqslant n$ donc $-n \leqslant q \leqslant n$ et $p \in \{-n, n\}$.

Si $p = n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[B_n C_n]$

car $\begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leqslant y_D \leqslant y_{C_n} = n \end{cases}$

Si $p = -n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[D_n A_{n+1}]$

car $\begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n-1 < -n \leqslant y_D \leqslant y_{D_n} = n \end{cases}$

$\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|,|q|) = n$:

par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n, n\}$.

Si $q = n$ alors $D(p,n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_n D_n]$

car $\begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$

Si $q = -n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_n B_n]$

car $\begin{cases} x_{A_n} = -n+1 \leqslant x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$

Ainsi dans tous les cas *D* est sur un des segments qui constituent la spirale.

Exercice 4 : le parc de loisirs

Première question :

Calculons le taux de satisfaction par quartier sur les deux communes :

	Commune de *LA GRANGE*			Commune de *LA PLACE*			Ensemble des deux communes		
	EXP	SAT	TAUX DE SAT	EXP	SAT	TAUX DE SAT	EXP	SAT	TAUX DE SAT
centre	1500	1050	70 %	3000	2400	80 %	4500	3450	76,7 %
1ère couronne	2400	1728	72 %	1200	984	82 %	3600	2712	75,3 %
2ème couronne	1400	994	71 %	800	648	81 %	2200	1642	74,6 %
3ème couronne									

Il est donc vrai que dans chacune des communes, les plus favorables à l'implantation du parc de loisirs sont (pour le moment) les personnes des quartiers 1ère couronne. Cependant, l'analyse des deux maires est incorrecte : en calculant le taux de satisfaction par quartier en réunissant les deux communes, on s'aperçoit que les plus favorables sont les gens des quartiers centre , suivis de ceux des quartiers 1ère couronne puis de ceux des quartiers 2ème couronne.

Deuxième question :

Utilisons les données de l'énoncé. Nommons x le nombre de personnes qui sont satisfaites dans le quartier 3ème couronne de la commune de *LA PLACE*. Alors $x \leqslant 1000$ et $4x \geqslant 1500$. Donc : $\boxed{x \in [375 ; 1000]}$

	Commune de *LA GRANGE*			Commune de *LA PLACE*			Ensemble des deux communes		
	EXP	SAT	TAUX DE SAT	EXP	POUR	TAUX DE SAT	EXP	POUR	TAUX DE SAT
OUEST	1500	1050	70 %	3000	2400	80 %	4500	3450	76,7 %
SUD	2400	1728	72 %	1200	984	82 %	3600	2712	75,3 %
EST	1400	994	71 %	800	648	81 %	2200	1642	74,6 %
NORD	$4x$	1500		1000	x		$1000 + 4x$	$1500 + x$	
TOTAL							$11300 + 4x$	$9304 + x$	

• <u>Calculons alors le taux de satisfaction global, que l'on notera *f(x)*.</u>

$f(x) = \dfrac{9304 + x}{11300 + 4x}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -375\}$

f est une fonction rationnelle dont on va limiter le domaine d'étude à l'intervalle [375; 1000].
f est dérivable sur cet intervalle et, pour tout réel *x* de [375; 1000]:

$$f'(x) = \frac{11300 + 4x - 4(9304 + x)}{(11300 + 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-25916}{(11300 + 4x)^2}$$

Or, pour tout *x* de [375; 1000], $(11300 + 4x)^2 > 0$ et $-25916 < 0$ donc $f'(x) < 0$.

Il en résulte que *f* est strictement décroissante sur [375 ; 1000]. Dressons le tableau de variation de *f* sur [375; 1000].

x	375	1000
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$\dfrac{9679}{12800}$ ↘	$\dfrac{10304}{15300}$

De plus *f* est dérivable donc continue sur [375 ; 1000]. Il en résulte que $f([375 ; 1000]) = [\dfrac{10304}{15300} ; \dfrac{9679}{12800}]$

Le taux de satisfaction global se situe donc dans l'intervalle $[\dfrac{10304}{15300} ; \dfrac{9679}{12800}]$.

<u>Rq</u> : Il se situe donc entre $\dfrac{10304}{153}$ % et $\dfrac{9679}{128}$ %, soit, pour fixer les idées, entre 67,34 % (à 0,01 % près par défaut) et 75,62 % (à 0,01 % près par excès)

Troisième question :

On sait que, pour que le parc s'implante, chaque quartier de chaque commune doit afficher un taux de satisfaction d'au moins 50 %.
<u>Cette condition est déjà satisfaite pour les quartiers centre, $1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ couronne de chaque commune</u>. Pour qu'elle le soit pour chacun des quartiers3ème couronne, et donc pour que le projet aboutisse, il faut et il suffit que :

$\dfrac{1500}{4x} \geqslant 0{,}5$ et $\dfrac{x}{1000} \geqslant 0{,}5$ ce qui se traduit par $\boxed{\boldsymbol{x \in [500 ; 750]}}$

$1^{\text{ère}}$ méthode :

D'après la question 2, f réalise une bijection de [500 ; 750] sur [f(750) ; f(500)], ce qui se traduit par le fait que : $\boxed{\mathbf{500 \leqslant x \leqslant 750 \text{ équivaut à } f(750) \leqslant f(x) \leqslant f(500)}}$

Or,
$f(500) \approx 0{,}737$ (à 10^{-3} par défaut)
$f(750) \approx 0{,}704$ (à 10^{-3} par excès)

Or, $[0{,}75 ; 1] \cap [f(750) ; f(500)] = \varnothing$ donc

Le maire se trompe : si le taux de satisfaction global est de 75 % ou plus, le projet n'aboutira pas.

2^{nde} méthode :

$$f(x) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{9304 + x}{11300 + 4x} \geqslant 0{,}75$$

$$f(x) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{9304 + x}{11300 + 4x} - 0{,}75 \geqslant 0$$

$$f(x) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{829 - 2x}{11300 + 4x} \geqslant 0$$ Or $11300 + 4x > 0$, pour tout x de [375; 1000]

Donc, $f(x) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow 829 - 2x \geqslant 0$ soit encore $x \in [375 ; 414{,}5]$. Autrement dit, le taux de satisfaction global est supérieur ou égal à 75 % si et seulement si le nombre de gens satisfaits du projet dans le quartier 3$^{\text{ème}}$ couronne de *LA PLACE* est inférieur ou égal à 414, ce qui donnera un taux de satisfaction maximal pour ce quartier de 41,4 %.

En conséquence, le maire se trompe et le projet n'aboutira pas.

Commentaire :

Cette situation pourrait sembler paradoxale. En effet, on serait tenté de croire que plus le taux de satisfaction global est élevé, plus le projet a des chances d'aboutir. En fait, il n'en est rien ! l'analyse montre que plus x est proche de zéro (et donc plus le taux de satisfaction du quartier Nord de *LA PLACE* est faible (puisqu'il est de $\frac{x}{10}$ %)), plus le taux de satisfaction global est élevé. Or, pour voir le projet aboutir, le taux de satisfaction du quartier Nord de LA PLACE doit être d'au moins 50 %, ce qui lève le paradoxe.