TP : RECHERCHE D'UNE FORMULE ALGEBRIQUE (d'après le n° 127 page 32 du livre Hyperbole)

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$$

Qu'y a-t-il de « remarquable » ¿¿¿ Est-ce une simple « coïncidence » ¿
Le T.P. suivant va vous permettre de vous faire une opinion ...

On pose $P = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ où n désigne un entier naturel non nul.

L'objectif de cet exercice est donc de trouver, si elle existe, une « écriture » de P sous la forme d'un carré.

1. **Calculs**
   A l'aide du tableur, calculer P pour les valeurs de n de 1 à 20 en adoptant la présentation ci-dessous :

	A	B	C	D	E
1	n	n+1	n+2	n+3	P
2	1				
3	2				
4					

2. **Conjecture**
   a. Que dire de P pour toutes les valeurs de n testées ¿
   b. « Imaginer » alors une formule qui permettrait de calculer P à l'aide de n et de $(n+3)$ uniquement. Vous complèterez le tableau ci-dessus avec une ou des colonnes permettant de vérifier si la formule « conjecturée » est « valable ».

   Remarque : si vous en avez besoin, la racine carrée s'obtient en tapant « =racine(cellule) »

Appeler le professeur pour valider la conjecture**

3. **Démonstration**
   a. Développer $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$
   Si ce calcul vous paraît fastidieux, vous pouvez utiliser un logiciel de calcul formel pour ne pas rester bloqué.
   b. Développer la formule que vous avez conjecturée.
   Là aussi, le calcul formel peut vous être utile.
   c. Conclure en donnant l'écriture P sous forme d'un carré.

**** Ce TP adopte le « découpage » qu'on rencontre pendant les épreuves pratiques du Bac :**
« Manipulation logicielle + Conjecture → appel examinateur + validation → démonstration »

Objectifs :

A partir d'une « curiosité » arithmétique, découvrir une formule algébrique qui n'est pas aussi simple que ça.
Il s'agit aussi de comprendre l'utilité du calcul littéral pour généraliser une formule.

Déroulement du scénario :

Le découpage « volontaire » de l'énoncé façon « épreuve pratique de terminale S » et la présentation du sujet ne laissent pas le choix du logiciel : les élèves utilisent le tableur sans réels problèmes, même pour ceux qui l'ont très peu manipulé au collège.
La conjecture sur la « nouvelle formule » est plus délicate, certains arrivent à gérer les renseignements lus sur l'écran du tableur, d'autres sont réellement bloqués ... ici, le professeur donne son aide si l'élève n'avance pas.
L'idée de la « colonne test » créée pour vérifier si la nouvelle formule est « viable » est donnée dans l'énoncé : c'est un TP de début d'année, qui permet de reprendre contact avec le tableur ... on peut penser que plus tard dans l'année, avec des élèves plus à l'aise, cette étape est laissée à leur initiative.
La partie démonstration en déroute certains : développer 4 facteurs n'est pas si simple que ça, surtout quelques jours après la rentrée. Cela ouvre la porte à l'utilisation du calcul formel, pour nous DERIVE, et permet aux élèves, au moins dans un premier temps, de s'affranchir de ces calculs, pour eux, fastidieux.
La conjecture étant validée, je leur demande quand même, pour le plaisir, de faire les calculs « à la main » .

Apport des TICE :

Apport évident des possibilités du tableur qui permet de « voir » que la formule est bien « remarquable » ... au moins sur les 20 premiers calculs.
DERIVE permet donc aux élèves qui ont du mal avec le calcul algébrique de vérifier que le développement de leur « nouvelle formule » est bien identique au développement de la formule initiale.

#1: $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1$

l'élève cherche le menu "développement"

#2: EXPAND($n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1$, Trivial, n)

#3: $n^4+6\cdot n^3+11\cdot n^2+6\cdot n+1$

l'élève reprend la formule conjecturée qu'il a pu "tester" grâce au tableur et cherche à développer

#4: $(n\cdot(n+3)+1)^2$

#5: EXPAND($(n\cdot(n+3)+1)^2$, Trivial, n)

#6: $n^4+6\cdot n^3+11\cdot n^2+6\cdot n+1$

puis la conclusion ... P est un carré !

Liste des compétences expérimentales travaillées :

Émettre une conjecture
Tester sa validité , sa « robustesse » (c'est explicitement demandé par l'énoncé)
Ici, la démarche est indiquée (développer les deux écritures), mais elle peut être laissée à l'initiative de l'élève.

TP déclinable « à l'envie » ... $48^2-47^2-46^2+45^2$, $216\times226-221^2$, $(4n-7)^2+26n-40+9n^2$ carré parfait