

De la conférence « Les incertitudes de mesures » à l'utilisation des incertitudes en Terminale

Estimation des incertitudes (évaluation de type A ou de type B)

Type d'évaluation	Formules d'évaluation de l'incertitude	Exemples																				
<p>Evaluation de type A : traitement statistique</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ L'estimation du résultat de la mesure est donnée par la moyenne arithmétique : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ▪ L'écart-type expérimental (noté s_{exp} ou s_x ou σ_{n-1}) a pour expression : $s_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ ▪ L'incertitude-type, noté u, est déterminé par : $u = \frac{s_{\text{exp}}}{\sqrt{N}}$ ▪ L'incertitude élargie ou incertitude de la mesure, noté U, est $U = k \cdot u$ où k est le facteur d'élargissement (La valeur de k dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi) <p>Valeurs du facteur d'élargissement k pour un niveau de confiance de 95 %, issues d'une loi statistique dite « loi de Student »</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">Nombre de mesures</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">11</td> <td style="text-align: center;">12</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">k</td> <td style="text-align: center;">12,7</td> <td style="text-align: center;">3,18</td> <td style="text-align: center;">2,57</td> <td style="text-align: center;">2,45</td> <td style="text-align: center;">2,36</td> <td style="text-align: center;">2,31</td> <td style="text-align: center;">2,26</td> <td style="text-align: center;">2,23</td> <td style="text-align: center;">2,20</td> </tr> </table> <p>(On prend en général, $k \approx 2$ pour un niveau de confiance de 95 %)</p>	Nombre de mesures	2	4	6	7	8	9	10	11	12	k	12,7	3,18	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,20	<p><i>Mesure d'une masse de 100 mL d'eau (9 mesures)</i></p> <p>Un tableur permet de calculer :</p> <ul style="list-style-type: none"> - la valeur moyenne : $\bar{m} = 99,4856 \text{ g}$ - l'écart-type expérimental : $s_{\text{exp}} = 0,5824 \text{ g}$ - l'incertitude-type (de répétabilité) : $u = \frac{0,5824}{\sqrt{9}} = 0,1941 \text{ g}$ - l'incertitude-type élargie (si on ne prend en compte que l'incertitude de répétabilité) : pour 9 mesures, on lit dans la table de Student : $k = 2,31$ <p>d'où $U(m) = 2,31 \times 0,1941 = 0,45 \text{ g}$</p> <p>On peut exprimer le résultat : $m = 99,49 \pm 0,45 \text{ g}$, à 95% ou $m = 99,5 \pm 0,5 \text{ g}$, à 95%</p>
Nombre de mesures	2	4	6	7	8	9	10	11	12													
k	12,7	3,18	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,20													
<p>Evaluation de type B : Lois « à priori » (Lois de probabilité : loi uniforme ou rectangle telle que figure ci-dessous ; loi normale ou gaussienne)</p> <div style="text-align: center;"> </div>	<p>Pour un appareil numérique : (loi rectangle)</p> <p>Si la résolution est « q », l'incertitude-type est $u = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$</p>	<p><i>Mesure d'une masse avec une balance à affichage numérique au 1/100 de g ($q = 1/100 \text{ g}$) :</i></p> <p>$u = \frac{1/100}{2\sqrt{3}} = 0,003 \text{ g} \Rightarrow U(m) = 0,006 \text{ g}$</p> <p>soit $m = 52,45 \pm 0,01 \text{ g}$</p>																				
<p>- On détermine d'abord l'incertitude-type u</p> <p>- On en déduit l'incertitude-type élargie ou incertitude de mesure $U = 2 \cdot u$, pour un niveau de confiance à 95 %</p> <p>- On exprime le résultat de la mesure : $X = x \pm U$, unité, niveau de confiance</p>	<p>Pour un appareil à graduation (réglet, cadran, ...) : (loi normale)</p> <p>Si la résolution est « q », l'incertitude-type est $u = \frac{q}{6}$</p>	<p><i>Mesure d'une température avec un thermomètre à graduations ($q =$ plus petite graduation lue = $0,5^\circ\text{C}$)</i></p> <p>$u = \frac{0,5}{6} = 0,083 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow U(\theta) = 0,17^\circ\text{C}$ soit $\theta = 23,9 \pm 0,2^\circ\text{C}$</p>																				
	<p>Instrument vérifié et conforme à une classe : (loi rectangle)</p> <p>Si la classe est $\pm a$, l'incertitude-type est $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$</p>	<p><i>Mesure d'un volume à l'aide d'une fiole jaugée de 100 mL, intervalle de tolérance = $\pm 0,1 \text{ mL} = \pm a$</i></p> <p>$u = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,058 \text{ mL} \Rightarrow U(V) = 0,12 \text{ mL}$</p> <p>soit $V = 100,0 \pm 0,1 \text{ mL}$</p>																				

Estimation d'une incertitude-type composée

L'incertitude-type composée est l'incertitude-type d'un mesurage lorsque le résultat y est obtenu à partir des valeurs X_i , d'autres grandeurs

Grandeurs	Incertitude-type associée à la grandeur	Méthode d'évaluation
X_1	$u(X_1)$	Evaluation de type A et/ou de type B
X_2	$u(X_2)$	
X_N	$u(X_N)$	
$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$	Incertitude-type composée $u_c(Y)$	Loi de propagation des incertitudes : $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$ (Cf. applications courantes ci-dessous)

Cas particuliers fréquents :

	Application de la loi de propagation des incertitudes	Exemples
Cas d'une somme (ou d'une soustraction) : $y = X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_N$	$u_c^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + \dots + u^2(x_N)$	
Cas d'un produit (ou d'un quotient) : $y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$	$\frac{u_c^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + \dots + \frac{u^2(x_N)}{x_N^2}$	Masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$ $\frac{u_c^2(\rho)}{\rho^2} = \frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(V)}{V^2}$

Pour terminer ... :

- **Incertitude élargie U :** $U(Y) = k \times u_c(Y)$ où k est le facteur d'élargissement ($k = 2$ pour un niveau de confiance de 95 %)
- **Expression du résultat :** $Y = y \pm U$, unité, niveau de confiance