Consolider des concepts et développer des automatismes par la pratique d'activités rapides

17 octobre 2022

Table des matières

1 Introduction

Cette ressource produite par l'équipe de « la course aux nombres » a pour objectif d'alimenter la réflexion des enseignants des premier et second degrés sur la construction/consolidation de concepts et le développement d'automatismes. Elle est nourrie de nombreux exemples qui illustrent les propos notamment didactiques. Des annexes thématiques publiées régulièrement enrichiront progressivement cette ressource qui se veut évolutive.

1.1 La pratique des questions « flash » : objectifs et vigilance

Dans ce document, nous traitons uniquement l'objet pédagogique de l'activité rapide par les questions « flash » dont les objectifs sont à la fois de construire/consolider des concepts mathématiques et de développer des automatismes. Il va de soi qu'il ne s'agit surtout pas de réduire l'activité mathématique à ce type de pratique. Les notions mathématiques s'acquièrent aussi et surtout par des activités et des problèmes qui leur donnent du sens et qui permettent de les faire émerger. La diversité des activités mathématiques et la diversité des modalités pédagogiques mises en œuvre sont essentielles à la qualité de l'enseignement dispensé.
Dans la formation de l'élève, même lorsque celle-ci est de grande qualité, le sens d'une procédure, la compréhension d'un objet abstrait, ne précèdent malheureusement pas toujours les automatismes qui y sont liés. Il arrive souvent qu'au détour d'une question, un élève comprenne, parfois bien plus tard, maturité intellectuelle aidant, une notion étudiée par le passé. La pratique d'activités rapides avec des questions « flash » doit permettre par la réactivation de notions, par la diversité des questions posées autour de ces notions, de les consolider, de développer progressivement des automatismes, et d'en inhiber d'autres. Il s'agit ainsi de donner régulièrement l'occasion à l'élève et sur du long terme de comprendre des concepts essentiels.

1.2 Des automatismes pour favoriser la résolution de problèmes

Dans le cadre de la résolution de problèmes, les automatismes favorisent l'engagement de l'élève et libèrent la pensée pour lui donner davantage de perspective dans la démarche de résolution. L'extrait du programme de lycée ci-dessous, valable quelque soit le niveau d'enseignement, exprime la nécessité de développer des automatismes pour la résolution de problèmes :

« La résolution de problèmes est centrale dans l'activité mathématique car elle offre un cadre privilégié pour travailler, mobiliser et combiner les six compétences mathématiques tout en développant des aptitudes transversales. Toutefois, pour résoudre des problèmes, il faut être en capacité de prendre des initiatives, d'imaginer des pistes de solution et de s'y engager sans s'égarer. Pour cela, on procède souvent par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes ou en adaptant une méthode connue à la situation étudiée. La disponibilité d'esprit nécessaire à ces étapes essentielles suppose des connaissances, des procédures et des stratégies immédiatement mobilisables, c'est-à-dire automatisées. L'acquisition de ces automatismes est favorisée par la mise en place, dans la durée et sous la conduite du professeur, d'activités rituelles. Il ne s'agit pas de réduire les mathématiques à des activités répétitives, mais de permettre un ancrage solide des fondamentaux, afin de pouvoir les mobiliser en situation de résolution de problèmes. Parallèlement à l'ancrage de notions incontournables, les activités visant l'acquisition d'automatismes fournissent des conditions de réussite rapide et mettent l'élève en confiance pour s'engager dans la résolution de problèmes ».

2 Nature des automatismes

Les automatismes convoquent en général sans en reconstruire le sens un ensemble de connaissances et de procédures immédiatement disponibles en mémoire. Ces connaissances ou procédures sont acquises au point qu'elles deviennent des réflexes pour les élèves. La reconnaissance de la situation et son traitement sont alors immédiats. Les automatismes sont de différentes natures. Nous avons tenté de les classer dans différentes catégories, non nécessairement disjointes, listées ci-dessous :

Les faits numériques mémorisés (quelques exemples) :

- Décompositions additives des nombres inférieurs à 10 ($7 = 5 + 2 = 4 + 3 = \ldots$), inférieurs à 100 ou à 1 000 ;
- tables de multiplication, des décompositions multiplicatives $24 = 8 \times 3 = 4 \times 6 = \ldots$..., les multiples de 25 ;
- des faits numériques mémorisés sur la représentation de nombres $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$;
- les relations entre les unités de numération (1 dixième = 10 centièmes ...) ;
- multiplier par 0,5 c'est prendre la moitié... ;
- des faits numériques mémorisés liés aux conversions : 1 h= 60 min, 1 $\text{m}^3 = 1000$ L ;
- 50 % d'une quantité c'est la moitié de celle-ci ....

Nous vous invitons à consulter la gazette n°2 de la course aux nombres sur les faits numériques mémorisés pour le cycle 3 sur la page du site de l'académie de Strasbourg dédiée à la « la Course aux nombres » (lien direct avec le document)

Les procédures automatisées de calcul(quelques exemples) :

- $12 \times 17 = 10 \times 17 + 2 \times 17 = 170 + 34 = 204$
- $21 \div 5 = (21 \times 2) \div 10 = 4{,}2$ ou $21 \div 5 = 20 \div 5 + 1 \div 5 = 4 + 0{,}2 = 4{,}2$ ou ...
- $1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$
- 30 % de 60 :
  10 % de 60 = 6 donc 30 % de 60 = 18
  ou 30 % de 60 $= 0{,}3 \times 60 = 3 \times 6 = 18$ ou ...
- $2x + 3x = 5x$
- Résolution d'équations (travail sur les égalités) : $3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2}$

Remarque : Les procédures automatisées de calcul enclenchent souvent une succession d'automatismes. L'automatisation de certaines procédures complexes nécessite au préalable l'acquisition de faits numériques mémorisés ou de procédures plus élémentaires.

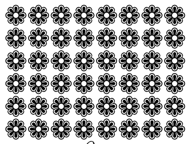
Automatismes liés au changement de registres :

- Une multitude de registres peut être convoquée autour du nombre $\dfrac{4}{3}$. Dans le registre langagier, dès la classe de CM1, $\dfrac{4}{3}$ s'entend comme « quatre tiers » ou « quatre fois un tiers ». En sixième, $\dfrac{4}{3}$ est également considéré comme « le tiers de quatre »(quotient de 4 par 3 ou le nombre 4 divisé par 3) ou exprimé dans le registre des équations (à trou), comme solution de l'équation $3 \times \ldots = 4$.
  La manière d'interpréter l'écriture fractionnaire dépend souvent de la nature de la question posée.
- $25\,\% = \dfrac{1}{4}$
- 2,5 milliards $= 2{,}5 \times 10^9$
- $\dfrac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $3{,}5 \times 9 = 3 \times 9 + \dfrac{1}{2} \times 9 = 27 + 4{,}5 = 31{,}5$ (stratégie de calcul qui implique de considérer 3,5 comme le nombre $3 + \dfrac{1}{2}$)
  $3{,}5^2 = \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{4} = \dfrac{24{,}5}{2} = 12{,}25.$
  Cette stratégie convoque le changement de représentation $3{,}5 = \dfrac{7}{2}$.
- Au lycée :
  - Signe de $(x - 3)(x - 5)$ (reconnaissance d'un trinôme du second degré puis passage au registre graphique)

* $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ (passage au registre graphique)

Automatismes liés à la modélisation (quelques exemples) :

- « *Un train électrique fait un tour de circuit en* 20 *s. Combien de tours fait-il en* 100 *s ?* » (Le train se déplace à vitesse constante)
  L'automatisme visé est celui qui consiste à modéliser ce problème concret par le problème mathématique : « dans 100, combien de fois 20 ? » pour revenir au problème concret et y répondre.
- « *La hauteur de* 4 *cubes identiques posés les uns sur les autres mesure* 12 *cm. Combien mesure la hauteur de* 6 *cubes identiques posés les uns sur les autres ?* »
  L'automatisme visé est le traitement de ce problème dans le cadre de la proportionnalité.
- « *Combien y a-t-il de petites fleurs ?* »
  L'automatisme visé est la modélisation par la multiplication.



- « *J'achète* 3,2 *kg de tomates à* 2,10 *€ le kilogramme ? Combien vais-je payer ?* »
  L'automatisme visé est la modélisation par la multiplication de deux décimaux dont aucun des deux n'est entier. La multiplication ne peut plus être considérée comme une addition itérée. Le développement de cet automatisme mérite un travail sur le long terme (de la sixième à la fin du cycle 4).

3 Sens et automatismes

Les automatismes évitent la surcharge cognitive par un traitement rapide de sous-tâches et permettent ainsi de libérer la pensée pour d'autres tâches. Mais il serait vain d'imaginer que leur acquisition est un processus rapide qui s'épargnerait d'une construction progressive des nouveaux concepts et des nouvelles méthodes en jeu.

« *...la mémoire ne doit être là que pour retenir des résultats qu'on a appris à trouver par divers moyens. Un automatisme ne le devient qu'après avoir pris du sens. Sinon, il demeure un acquis très précaire.* » Stella Baruk

Il est essentiel de ne pas viser l'automatisation de notions nouvelles trop précocement. La notion en jeu doit être bien construite pour saisir le domaine de validité et de pertinence des automatismes qui y sont liés et éviter des généralisations abusives. Il s'agit ainsi de proposer un questionnement varié qui permet à la fois une rencontre régulière avec la procédure dont on vise l'automatisation et de circonscrire le domaine d'application de celle-ci en revenant régulièrement au sens.

Considérons trois exemples :

> **Exemple 1 : (cycle 3)** L'acquisition du concept de nombre décimal en cycle 3 est difficile pour un bon nombre d'élèves. Les opérations sur les décimaux convoquent souvent des automatismes éloignés du sens (« je déplace la virgule vers la droite »), ou parfois à l'extension d'automatismes valables pour les entiers mais non valides pour les décimaux non entiers (« je rajoute un 0 lorsque je multiplie par 10 », automatisme générateur d'erreurs du type $3{,}4 \times 10 = 3{,}40$ ou 30,40 ») La compréhension du concept de nombre décimal constitue un enjeu majeur du cycle 3. Il est donc essentiel de convoquer le sens régulièrement, de ne pas laisser les élèves s'enfermer dans l'application de recettes qui ne peuvent pas faire sens, même si celles-ci conduisent aux bons résultats. Il est ainsi, par exemple, préférable de s'appuyer sur le glisse-nombre pour la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1000 tout en expliquant le sens du glissement(voir la vidéo la virgule et le décimal de Claire Lommé).

La diversité des questions posées, la diversité des représentations des nombres décimaux, le passage d'une représentation à une autre, la diversité des registres convoqués (nombre décimal comme mesure d'une grandeur, travail sur les axes) sont autant d'occasion de réinterroger régulièrement le sens et de donner corps aux automatismes qui se développent (Cf annexe 1 avec des exemples de questions qui peuvent être posées en cycle 3).

> **Exemple 2 : (fin de cycle 4 - lycée)**
> Les opérations sur les membres d'une égalité pour isoler une variable convoquent souvent des automatismes construits par les élèves (« quand j'ai un plus, cela fait un moins quand je passe le nombre de l'autre côté »). Ces recettes vides de sens conduisent à des erreurs classiques du type : $2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{-2}$.

L'explicitation des opérations en jeu doit faire l'objet d'un travail sur le long terme en cycle 4 et en seconde voire en première afin que les automatismes construits par les élèves se développent sur un socle solide et que le sens des procédures mises en œuvre, même s'il est évacué, affleure et soit mobilisable dans des situations plus complexes et inhabituelles.

> **Exemple 3 : (fin de cycle 4 - lycée)**
> De nombreux élèves fragiles appliquent les formules sur les puissances sans être en mesure de les justifier, et parfois même en ayant perdu le sens de l'écriture sous forme d'une puissance (notamment lorsque les exposants sont négatifs). Cela conduit à des extensions abusives de ces formules aux sommes de puissances par exemple. Des questions variées du type « écriture décimale de $10^3 \times 10^{-2}$ » , « écriture décimale de 5^3 », « écriture décimale de 2^{-2} », « écriture décimale de $10^2 + 10^{-1}$ », « le double de 2^{50} », « Écrire 100 milliards sous la forme d'une puissance de 10 », permettront de revenir sur le sens de l'écriture sous forme d'une puissance, sur le sens de ces formules, et d'inhiber les automatismes erronés.

Il s'agit ainsi de proposer un questionnement varié qui permettra à la fois une rencontre régulière avec la notion liée à l'automatisme et de circonscrire le domaine d'application de celui-ci en revenant au sens.

4 Diversité des automatismes

Autour d'une même question, les procédures automatisées peuvent être multiples et dépendent de la qualité des connaissances mobilisables par les élèves et du coût en mémoire de leurs mises en œuvre. Elles n'impliquent en général pas les mêmes apprentissages et permettent d'appréhender la notion en jeu sous différents angles. Il est essentiel de présenter un panel de procédures possibles et d'en discuter l'efficience. Plus l'élève est capable de faire appel à des automatismes variés et solidement construits autour d'une même notion, plus celle-ci est maîtrisée. La compréhension des concepts et l'acquisition d'automatismes sont au service l'une de l'autre. Le travail sur le sens assure des automatismes bien construits et l'acquisition d'automatismes bien maîtrisés et variés assurent l'aisance et consolident la compréhension des concepts.

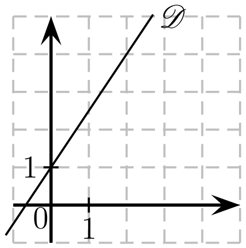
Exemple 1 :
Le calcul de 30 % de 60 peut conduire aux procédures automatisées suivantes (sans être exhaustives) :

- $10\,\%$ de $60 = 60 \div 10 = 6$ donc $30\,\%$ de $60 = 3 \times 6 = 18$.
- $\dfrac{30}{100} \times 60 = 0{,}3 \times 60 = 3 \times 6 = 18$
- Recherche de la quatrième proportionnelle par produit en croix (lourd en coût mémoire si le calcul de tête est exigé)

La première stratégie exploite la linéarité de la proportionnalité et s'avérera particulièrement efficiente pour le calcul de 15 % de 60 par exemple.
La deuxième mobilise principalement la procédure de la multiplication de la proportion 30 % par le nombre 60 et s'avérera indispensable pour monter en abstraction (30 % de x) et pour aborder de nouvelles notions (proportion de proportion, introduction du coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution notamment).
Les procédures ne sont pas les mêmes, abordent la proportion d'un nombre sous deux angles différents. Elles devraient toutes être mobilisables par les élèves pour une bonne maîtrise de la notion de calcul de la proportion d'une quantité.

Lorsque les stratégies sont diverses, il est important de les présenter, de les discuter pour construire solidement la notion et ne pas enfermer les élèves dans une stratégie unique.
Il suffit souvent de varier le questionnement pour faire émerger d'autres stratégies.

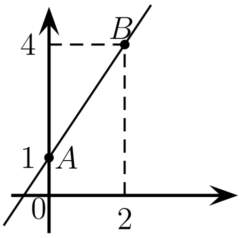
Exemple 2 : Autour des équations réduites de droites



Déterminer, par lecture graphique, une équation de la droite $\mathscr{D}$.

L'automatisme qui consiste à lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur est ici développé.

Les automatismes convoqués par cette question doivent être développés. Un élève peut y répondre sans comprendre la notion d'équation de droite. Il ne faudrait donc pas enfermer les élèves dans cet unique format de questionnement.

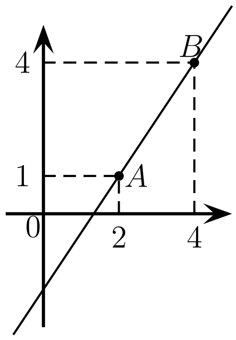


Compléter :
$C(6\,;\ldots) \in (AB)$

Stratégies possibles :

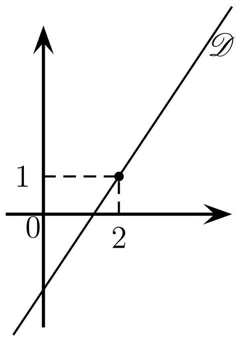
- Déterminer l'équation de la droite (AB) : $y = 1{,}5x + 1$ puis en déduire l'ordonnée de C par le calcul $y_C = 1{,}5 \times 6 + 1 = 10$ (ou détermination de l'expression de la fonction affine dont (AB) est la droite représentative).
- Exploiter la proportionnalité des accroissements : si x augmente de 2 alors y augmente de 3, donc si x augmente de 6, y augmente de 9 donc $y_C = 1 + 9 = 10$

La première stratégie de cette question interroge le sens d'une équation de droite, la seconde stratégie exploite la caractérisation de l'alignement par la proportionnalité des accroissements.



Compléter :
$C(12\,;\ldots) \in (AB)$

L'exploitation de la proportionnalité des accroissements est ici visée.



Le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est 1,5.
Compléter :
$B(12\,;\ldots) \in \mathscr{D}$

Cette question invite à interpréter le coefficient directeur comme coefficient de proportionnalité associé à la proportionnalité des accroissements.

Ces quatre exemples montrent qu'autour d'une même notion on peut travailler le sens tout en construisant de multiples automatismes :

- lecture de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur pour déterminer l'équation d'une droite ;
- utilisation d'une équation de droite comme test d'appartenance ;
- association droite et proportionnalité des accroissements ;
- association coefficient directeur et coefficient de proportionnalité.

5 Comment ?

5.1 Le rituel des questions « flash »

Les connaissances et les procédures à automatiser doivent faire l'objet d'une rencontre régulière et dans divers contextes. Les sciences cognitives ont fait la preuve de l'impact positif sur la construction d'une notion d'une pédagogie alternant des phases d'apprentissage,de réactivation et d'enrichissement.
Ces rituels constituent des phases denses qui mobilisent un panel large de compétences mathématiques :

- calculer ;
- chercher – communiquer (pour les questions dont l'objectif est de faire émerger des stratégies efficientes) ;
- raisonner (pour le calcul réfléchi, le choix de la procédure automatisée mise en œuvre dépend des nombres proposés et enclenche la réflexion même si celle-ci est rapide) ;
- représenter (pour les questions invitant à un changement de registre ou de représentation du nombre).

5.2 Conduite pédagogique

Il ne s'agit pas d'imposer les nouvelles procédures dont on vise l'automatisation mais de les faire émerger et d'en discuter l'efficience dans la perspective d'activités écrites rapides ou mentales. La déconstruction d'erreurs est également essentielle parce-qu'elle permet de cibler précisément la source d'incompréhension et d'y remédier. Il est donc important que lors de la phase de recherche des élèves, le professeur circule dans les rangs et observe les productions pour pouvoir s'y appuyer lors de la correction.
À l'issue des discussions, afin d'expliciter les apprentissages, certaines procédures méritent d'être institutionnalisées par des exemples génériques dans une partie du cahier de leçon.
Les échanges, la déconstruction d'erreurs, la mise en exergue de nouvelles procédures sont chronophages, il ne faudrait donc pas multiplier les questions nouvelles lors d'une même phase de questions « flash ».

5.3 Activité mentale : pourquoi ?

L'activité mentale a pour vertu d'inviter, voire de forcer la mise en œuvre de certaines procédures automatisées. L'interdiction du recours à l'écrit invitera par exemple fortement les élèves à utiliser la linéarité de la proportionnalité pour le calcul de 15 % de 60. Dans un souci de progressivité et dans le cadre de la différenciation pédagogique, on pourra bien sûr autoriser dans un premier temps le support écrit mais l'objectif qui consiste à terme, pour certains types de questions, à répondre mentalement doit être clairement explicité.

5.4 Progression

En parallèle de la programmation annuelle des séquences, une progression spiralaire sur les notions à réactiver et les automatismes à construire permet de « cimenter » la programmation annuelle en consolidant et en anticipant des fondamentaux utiles aux chapitres à venir.
La réflexion sur chaque progression annuelle et le choix des notions à réactiver régulièrement mériterait d'être conduite en équipe pour donner une plus grande cohérence de l'enseignement dispensé tout au long du parcours scolaire de l'élève.

5.5 Travail hors la classe

Le temps dévolu au rituel des questions « flash » est limité en classe. Lorsque les connaissances et les procédures à automatiser ont été institutionnalisées (au moins oralement), celles-ci peuvent faire l'objet d'un travail hors la classe. On pourra par exemple proposer une feuille d'entraînement comportant diverses questions enclenchant des automatismes en précisant les attendus (durée indicative de temps, activité mentale ou écrit rapide ...).

5.6 Évaluation

Les phases de questions « flash » constituent souvent l'occasion d'établir un diagnostic sur l'acquisition des pré-requis des élèves en amont d'une séquence pédagogique. La pratique de questions « flash » peut également être l'occasion pour les élèves d'évaluer certaines acquisitions (savoir-faire / automatismes, compréhension de concept) et favoriser ainsi la régulation de leurs apprentissages. Les questions « flash » constituent ainsi une modalité adéquate pour l'évaluation diagnostique et l'évaluation formative.
Lorsque les concepts fondamentaux ou les automatismes à acquérir auront fait l'objet d'une rencontre et d'un entraînement régulier, des évaluations courtes à visée essentiellement sommative pourront être proposées. Si elles concernent l'évaluation d'automatismes, une contrainte de temps pourra être imposée. Celles-ci pourront régulièrement comporter des questions relevant d'une activité mentale (seule la réponse est écrite).

6 Annexes

Des exemples de questions « flash » accompagnés de commentaires expliquant les intentions didactiques feront l'objet de publication d'annexes. Chaque annexe sera dédié à un thème mathématique.

6.1 Liste des annexes publiées

- Les fractions et les décimaux au cycle 3