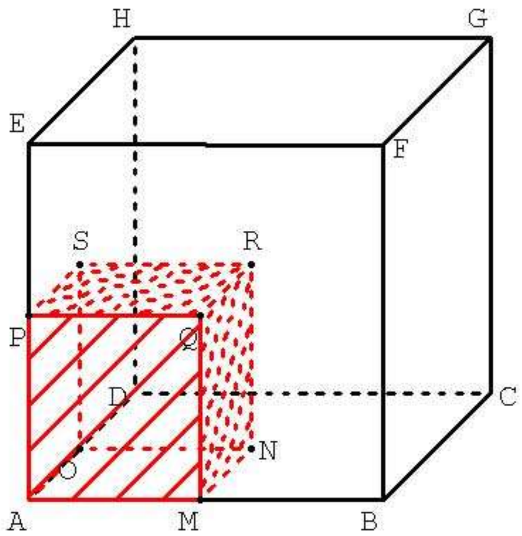
Des pavés dans un cube

Une activité en Seconde

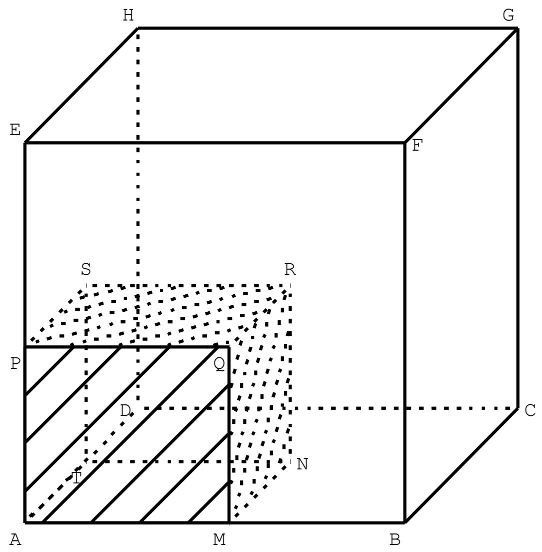


Enoncé l'activité

ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm.

On construit un point M appartenant au segment [AB] et le point P appartenant au segment [AE] tel que AM=EP. On construit alors le pavé droit AMNTPQRS de telle façon que AMNT soit un carré.

Etudier les variations du volume du pavé droit AMNTPQRS quand M varie sur le segment [AB].



Objectifs :

Cette activité peut servir d'introduction à la notion de fonction ou s'insérer plus tard dans l'année pour illustrer les les variations d'une fonction.

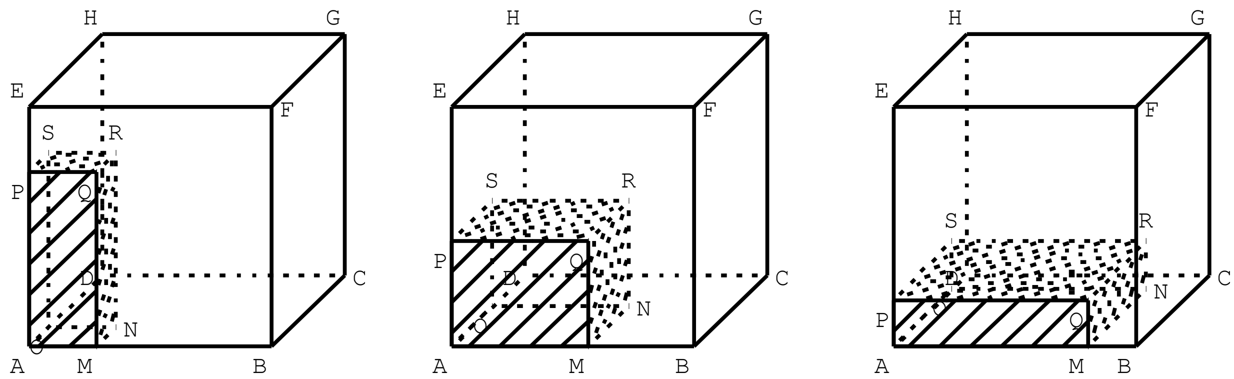
Il s'agit de faire fonctionner plusieurs concepts de la classe de seconde à travers une situation riche : notion de variable, volume, fonction, courbe représentative d'une fonction, croissance, décroissance, maximum, différentes écritures d'une expression. L'exploration avec un logiciel de géométrie dynamique ouvre la voie à des conjectures et la mobilisation du calcul formel permet de bien mener la preuve en exploitant les différentes écritures d'une même expression algébrique.

Scénario :

1.Ce qui a été fait avant :
Cette activité a été proposée au milieu de l'année de seconde : les élèves ont déjà rencontré quelques situations de géométrie plane dans lesquelles les fonctions interviennent. Les notions de fonction, de sens de variation, d'extremum sont en cours de construction.
Les élèves n'ont aucune expérience sous Géospace c'est pourquoi j'ai choisi de projeté l'animation en vidéoprojection. Les élèves ont déjà fait appel à un logiciel de calcul formel mis à disposition dans la salle de classe : cela peut-être une TI89 ou une TI*n*spire rétroprojetable achetée par l'établissement, ou un logiciel comme Xcas ou Dérive installé sur un ordinateur ressource en fond de classe.

2.Le déroulement :
Le texte de l'activité est distribué.
Quelques cas particuliers sont abordés : M au milieu de [AB], cas où AM=2 etc…
Les élèves imaginent mal ce qui se passe quand M est proche de A ou de B.
Je propose alors une animation avec Géospace.

<u>S'approprier la situation avec le logiciel géospace :</u>

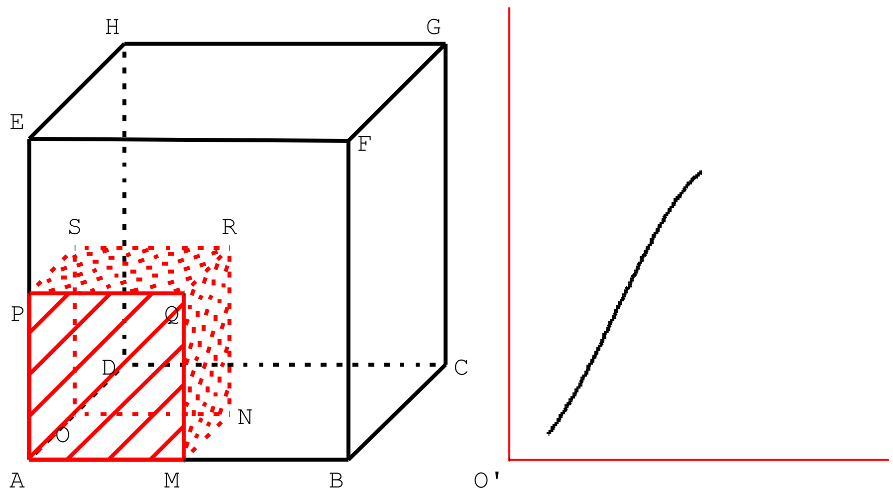


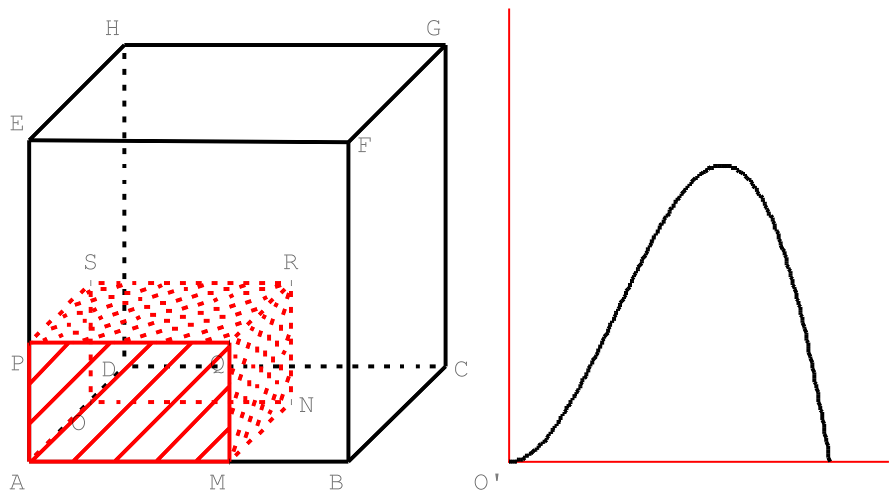
La figure dynamique obtenue par le pilotage au clavier du point M va permettre à chaque élève de s'approprier la situation. On peut lancer les questions suivantes :
Quelles sont les valeurs possibles pour la longueur AM ?
Que se passe-t-il pour M très proche de A ?
Que se passe-t-il pour M très proche de B ?
La fonction V apparaît comme lien entre la longueur AM notée *x* (compris entre 0 et 6) et le volume du pavé hachuré…Sachant que $V(0) =0$ et que $V(6) =0$, on peut demander aux élèves de dessiner à main levée une courbe représentative possible pour la fonction V. Les conjectures sur la croissance puis la décroissance de V s'expriment ainsi que l'existence fortement probable d'un maximum au moins.

<u>Affiner la conjecture</u>
On peut affiner la conjecture en faisant afficher les valeurs de x et celles de V(x)
On arrive à conjecturer l'existence d'un maximum (et un seul).

<u>Vers un tracé plus précis</u>
Le tracé à main levée de la courbe représentative de V sur [0 ;6] devient plus clair mais les élèves souhaitent un dessin plus préçis.
Géospace permet ce tracé :

Avec Géospace, en pilotant M au clavier ,on voit simultanément l'évolution de la forme du pavé hachuré et la valeur du volume correspondant.
L'interactivité entre la position de M et le tracé de la courbe est bien illustrée.





Les élèves aimeraient disposer de ce graphique sur leur calculatrice.

<u>Vers une écriture algébrique de V(*x*)</u>

Il est temps de passer à l'écriture algébrique de V(*x*) à l'aide de *x*.
On obtient : $V(x) = x^2\,(6-x)$ et la courbe peut s'afficher sur chaque calculatrice .
Les élèves peuvent alors conjecturer la valeur de *x* pour laquelle le maximum est atteint.
Ils peuvent s'aider de leur calculatrice graphique et arrivent à la conjecture suivante :
« Le volume semble maximum quand $x = 4$ ».

Il s'agit maintenant de prouver cette conjecture en étudiant le signe de $V(x)-V(4)$ quand *x* appartient à l'intervalle [0 ; 6] avec $V(x)-V(4) = x^2\,(6-x) - 32$.

gerard.cordes@ac-nantes.fr

Utilisation d'un logiciel de calcul formel

$x^2\,(6 - x) - 32$
$x\,(6x - x^2\,) - 32$
$-x^3\; + 6\,x^2\; - 32$
$-(x + 2)(x - 4)^2$
$-(x^2\; - 2x - 8)(x - 4)$
$(-x^2\; + 2x + 8)(x - 4)$
$(-x - 2)(x - 4)^2$

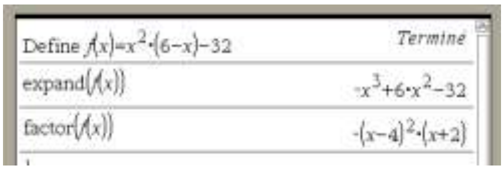
Le problème est de changer l'écriture de $x^2(6\text{-}x)-32$ pour mieux étudier le signe de cette expression. Pour un élève de seconde l'aide d'un logiciel de calcul formel est précieuse.

On peut voir ci-contre, différentes écritures de cette expression obtenues par un logiciel tel que Dérive .

Suit un travail de réflexion sur ces différentes écritures : quelle est l'écriture la plus adaptée à l'étude du signe de V(x)-V(4) ?

Les écritures $-(x + 2)(x - 4)^2$ ou $(-x - 2)(x - 4)^2$ vont permettre de résoudre le problème.

Avec TI*n*spire, on obtient :

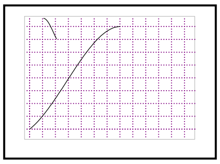


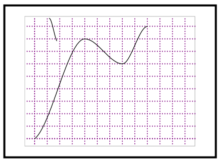
Synthèse des narrations de recherche

•Posons x = AM = EP. AMNT est donc un carré de côté x .
Comme le point M appartient au segment [AB], alors x varie dans [0 ; 6].
Appelons V(x) le volume du pavé droit AMNTPQRS.

•En observant les positions extrêmes du point M (M est en A ou M est en B), nous constatons que V(0) =0 et que V(6) =0. En utilisant le logiciel Géospace, nous avons pu modifier la position du point M sur le segment [AB] et conjecturer que le volume du pavé AMNTPQRS commence par croître à partir de la valeur 0, et finit par décroître jusqu'à la valeur 0 en passant par un maximum ou plusieurs .

On peut conjecturer une courbe représentative de V sous la forme :

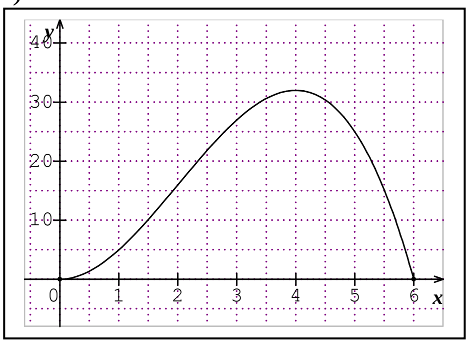




•Pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle [0 ; 6], on peut calculer le volume V(x) du pavé AMNTPQRS: tout revient donc à étudier la fonction V définie sur [0 ; 6]
En remarquant que AP = 6–x , nous obtenons : $V(x) = x^2\,(6-x)$.

Nous souhaitons alors construire la courbe représentative de la fonction V.

Utilisons une calculatrice graphique.
Quand X varie entre 0 et 6 , le tableau de valeurs, donné par la calculatrice, permet de choisir une fenêtre avec Y variant entre 0 et 40.



La courbe obtenue nous permet d'énoncer la conjecture suivante :
« Le volume du pavé AMNTPQRS semble maximum quand x = 4 ».

•Prouver cette conjecture revient à prouver que :V(x) ≤ V(4) quand x appartient à l'intervalle [0 ; 6] ou encore que : V(x) – V(4) ≤ 0 quand x appartient à l'intervalle [0 ; 6].
Or nous avons : V(x)–V(4) = x^2 (6–x)–32.
Cette expression est une différence et son signe n'est pas facile à étudier. Il faudrait changer l'écriture de cette expression…Comme nous n'arrivons pas à trouver mieux, nous allons demander l'aide du logiciel de calcul formel installé au fond de la classe. Avec les commandes « = » , « développer » , « factoriser », appliquées sur toute l'expression ou sur une partie sélectionnée de l'expression, nous obtenons plusieurs nouvelles écritures de l'expression V(x)–V(4) (voir encadré page précédente) .
Comme nous disposons de règles pour étudier le signe d'un produit et que nous savons qu'un carré est toujours positif, nous optons pour l'écriture : V(x)–V(4) = – (x + 2)(x – 4)^2.

3Pouvons-nous avoir une confiance totale dans le logiciel ? Nous préférons vérifier :

$$-(x+2)(x-4)^2 = -(x+2)(x^2-8x+16) = -(x^3-8x^2+16x+2x^2-16x+32) = -x^3+6x^2+32$$

$$x^2(6-x)-32 = 6x^2-x^3-32 = -x^3+6x^2-32$$

Donc , pour tout réel x , nous avons bien V(x)–V(4) = – (x + 2)(x – 4)^2.

3Nous savons que x appartient à [0 ; 6], alors x + 2 appartient à [2 ; 8] , donc x + 2 est positif,
donc – (x + 2) est négatif . Nous savons qu'un carré est toujours positif ou nul donc – (x + 2)(x – 4)^2 est négatif ou nul pour tout réel x appartenant à [0 ; 6] .
Nous avons prouvé que, pour tout x appartenant à [0 ; 6], V(x) – V(4) ≤ 0 ou encore que V(x) ≤ V(4).
La fonction V admet donc bien un maximum en x = 4 quand x varie dans [0 ; 6].
En utilisant cette même écriture, on pourrait poursuivre avec l'étude des variations de la fonction V (croissance sur [0 ;4] et décroissance sur [4 ;6]) afin de prouver que le maximum est unique sur [0 ; 6].

Compétences expérimentales :

► Prendre l'initiative de faire afficher les valeurs de la longueur AM et du volume du pavé, de passer à la construction d'un point de coordonnées (x ;V(x)), d'activer la trace d'un point pour parvenir à une courbe.
► Affiner une conjecture, tester la robustesse d'une conjecture.
► Prendre l'initiative de mobiliser un logiciel de calcul formel pour obtenir une forme factorisée.

Piste pour une évaluation

On peut donner une situation un peu voisine mais qui se déroule dans le plan.
On retrouvera les mêmes compétences expérimentales avec plus de facilité pour l'élève car il traitera cette activité avec Geoplan ou Géogébra qu'il maîtrise mieux que Geospace.

On considère un carré ABCD de côté 6cm.
Sur le côté [AB], placer un point M mobile.
Sur le côté DA, placer le point N tel que DN=AM.

Etudier l'aire du triangle MCN
quand le point M varie sur le segment [AB].