De la résolution de problèmes à la construction d'automatismes

ou

Le calcul littéral, fil rouge d'une réflexion sur les compétences attendues
au collège, au lycée et au lycée professionnel
et leur construction au quotidien.

VERSION COMPLETEE – JUIN 2013

Document rédigé par
Françoise Munck, IA-IPR de mathématiques dans l'académie de Nantes
Et
Stéphane Percot, IATICE de mathématiques et professeur au collège Haxo - La Roche-sur-Yon

Avec la collaboration de
Régine Coste IEN Maths Sciences dans l'académie de Nantes
Matthieu Avrillault, professeur au LP Audubon - Coueron
Xavier Beauvy professeur au LP Paul Emile Victor - Avrillé
Gérard Cordes professeur au lycée De Lattre - La Roche-sur-Yon
Yannick Danard professeur au collège Clément Jannequin - Avrillé
Fabrice Foucher professeur au lycée Jacques Prévert – Savenay
Emmanuel Malgras professeur au collège Pierre et Marie Curie - Le Pellerin
Annick Marguin professeur au collège Jean Rostand - Orvault
Grégory Maupu professeur au collège Milcendeau - Challans
Abdellah Mouda, professeur au LP Henri Dunant - Angers
Olivier Pinson professeur au lycée Auguste et Jean Renoir – Angers
Hélène Stainer professeur au collège Iles de Loire – St Sébastien sur Loire

Sommaire

Introduction

Ce document a pour objectif de rendre compte d'une réflexion et d'une expérimentation conduites au cours des années scolaires 2011-2012 et 2012-2013, dans le cadre des travaux mutualisés par la DGESCO A3, et centrées sur les stratégies pédagogiques susceptibles de faciliter une acquisition progressive et durable d'une maîtrise du calcul algébrique. Cette réflexion, qui touche une problématique centrale de l'enseignement des mathématiques, n'a pu être qu'amorcée et mérite d'être prolongée.

Nous tenons, en préliminaire, à rappeler un point qui nous semble essentiel : l'objectif prioritaire d'une formation mathématique en collège et en lycée est, et doit rester, de faire faire des mathématiques aux élèves. Or « ***faire des mathématiques*** » c'est « ***résoudre des problèmes*** ».

Nous souhaitons donc que les pratiques pédagogiques, qui peuvent être adoptées pour renforcer la maîtrise calculatoire des élèves, ne soient pas mises en œuvre au détriment des activités de recherche de problèmes.

En effet nous savons que les problèmes doivent être posés sous une forme la plus ouverte possible, de manière à laisser à nos élèves toute autonomie au niveau des ressources à utiliser et toute initiative au niveau de la stratégie à adopter, conditions nécessaires pour que les élèves construisent et/ou montrent les compétences attendues de la formation mathématique, que ce soit au collège ou au lycée.

Au collège, la résolution de problème, capacité clef du socle commun de connaissances et de compétences, doit pouvoir s'exercer dans une situation interne aux mathématiques mais aussi dans une situation qui ne ferait pas directement référence aux mathématiques. Nous parlons alors de « belle » tâche complexe.

Au lycée, tous les nouveaux programmes mettent l'accent sur la construction de la capacité à mobiliser les outils mathématiques dans des problèmes dont la contextualisation peut être empruntée aux disciplines qui donnent sa couleur à la voie de formation.

Pour autant, un élève ne peut pas résoudre de problème s'il ne maîtrise pas un minimum de technique. Sans ce minimum en effet toute réalisation technique d'une stratégie de résolution risque de se révéler particulièrement laborieuse, voire impossible à finaliser, ce qui est particulièrement démotivant.

Or force est de constater aussi que nos élèves savent de moins en moins calculer. Le calcul algébrique fait même aujourd'hui souvent obstacle à l'activité mathématique d'élèves qui ont pourtant du potentiel en mathématiques et qui sont amenés à faire des études nécessitant d'être un bon utilisateur des mathématiques.

Il est donc essentiel de munir tous nos élèves d'un minimum de technique calculatoire.

Mais quel est ce minimum ?
Quelles priorités se donner ?
Les élèves ont-ils tous les mêmes besoins ?
Quels sont les élèves qui ont le plus besoin d'une bonne habileté calculatoire ?
Quels leviers pour construire progressivement et de façon différenciée une nécessaire maîtrise technique ?

Autant de questions sur lesquelles notre réflexion s'est concentrée et sur lesquelles nous souhaiterions apporter quelques éléments de réponse pour faciliter le travail au quotidien avec les élèves.

1) Vers une construction progressive des compétences algébriques

a) Démarrer par des problèmes ouverts, des tâches complexes

L'objectif fixé au niveau national pour cette année scolaire consistait précisément à :

- *proposer des scénarios de formation des élèves les conduisant à mettre en œuvre de manière autonome une stratégie de résolution de problèmes ouverts (« tâches complexes ») en lien avec des capacités de calcul attendues.*
- *formaliser une réflexion à la fois sur la contribution des outils numériques (tableur, calcul formel) dans le cadre de l'étude d'un problème ouvert et sur les compétences développées dans le cadre d'une telle recherche ainsi que sur leur évaluation.*

Notre recherche nous a donc naturellement amenés à **questionner le rôle de la tache complexe (ou du problème ouvert)** et celui des outils logiciels **dans la construction des capacités de calcul attendues.**

L'état actuel de notre réflexion nous conduit à dire que, selon nous, si les tâches complexes et les problèmes ouverts sont essentiels à la construction des compétences de résolution de problème, **ils ne permettent pas de construire à eux seuls l'habileté calculatoire visée**. Le problème ouvert s'impose pour donner du sens, ou donner à comprendre, l'intérêt d'une stratégie calculatoire nouvelle, ou d'une stratégie que l'on a déjà rencontrée mais que tous ne se sont pas encore appropriée.

Il faut donc trouver aussi le moyen de faire travailler à nos élèves la « technique » : **construire des automatismes nécessite de s'entraîner régulièrement et suffisamment.**

b) S'autoriser à travailler la technique

Quelques principes :

1. Nous avons pris l'habitude de **travailler les stratégies calculatoires par petites touches et de façon récurrente,** de manière à donner à chaque élève toutes les chances de se les approprier.

   Par exemple en quatrième « développer et réduire une expression », en seconde « transformer une expression pour pouvoir donner son signe » font l'objet d'un entrainement régulier, systématique et conduit à doses homéopathiques (un ou deux calculs tous les jours pendant une période donnée).

2. Nous saisissons **toutes les occasions de faire de la technique au sein même de certaines situations**. Nous savons en effet d'expérience que c'est quand le calcul littéral se détache des situations pour devenir un outil autonome que le danger de la perte de sens pour les élèves se présente.

   Par exemple les activités de dénombrement, telle que celle des « mosaïques » (voir annexe) permettent de commencer à développer la technique au sein même de la situation, en maintenant toujours un contrôle possible par retour à la situation. Ce type d'aller-retour est rassurant et porteur de sens pour les élèves les plus fragiles.

3. Nous nous abstenons aussi de donner *a priori* une règle car nous pensons qu'une ***règle n'est pas le moyen de comprendre plus vite. C'est plutôt le moyen d'aller plus vite … une fois que l'on a compris***. Nous voulons donc donner à chaque élève la possibilité d'accéder à la règle par lui-même quand il y est prêt.

   Par exemple, nous confrontons régulièrement nos élèves de quatrième à des réductions d'expressions du type A = $4x - (3x - 5)$ ou B = $3x - (-4x + 7)$ le but étant que le raisonnement « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé » s'installe durablement.

4. Si certaines stratégies d'élève en acte peuvent se révéler opérantes, nous évitons soigneusement de les oraliser

   Par exemple «moins par moins donne plus ». Nous savons que ce type de règle est incorrecte (confusion entre deux sens du symbole « moins » : opération et opposé) voire de nature à générer du trouble.

5. Nous limitons le plus possible le nombre des règles calculatoires données.

   En collège, nous ne formalisons que la distributivité (simple) de la multiplication par rapport à l'addition. Tout le reste en découle. L'essentiel de notre travail consiste à montrer aux élèves comment.

6. Certains raisonnements peuvent aboutir à **des stratégies que nous formalisons, mais pas toujours dans le cas général.**

   Par exemple en seconde nous attendons que nos élèves sachent donner, suivant les valeurs de la variable x, le signe de $a\,x + \mathrm{b}$, pour des valeurs numériques données de a et b, en s'appuyant sur la connaissance du sens de variation de la fonction affine. Nous évitons de donner le tableau de signes de $a\,x + b$ dans le cas général car nous avons constaté que celui-ci induisait chez nos élèves essentiellement un effort de mémorisation, avec parfois perte de sens voire confusion (avec le second degré tout particulièrement) et *in fine* pour beaucoup d'entre eux perte d'efficacité. Remobiliser dans ce cadre les acquis sur le sens de variation de la fonction affine et un minimum de réflexion est à la fois plus simple et surtout plus efficace.

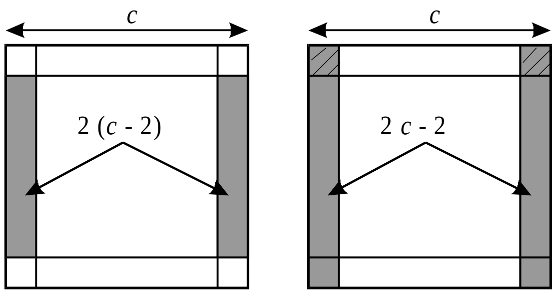
Toutefois notre réflexion nous a fait prendre conscience que, lorsqu'une stratégie calculatoire nous semble installée, nous nous comportons comme si la cause était entendue et la victoire gagnée. C'est sans doute à ce moment là que **quelques gammes s'imposent**.

Une prudence toutefois : lorsque les élèves commencent les gammes, il est très important de **revenir régulièrement au sens, en particulier dans le traitement des erreurs**.

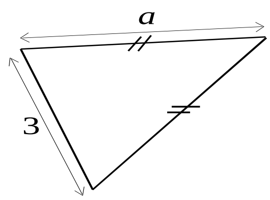
Plusieurs façons de revenir au sens :

- utiliser des situations emblématiques dans la classe pour illustrer les expressions littérales qui posent problème

Par exemple : Un élève écrit : 2 (a – 2) = 2 a – 2 (a pouvant prendre n'importe quelle valeur).
On peut lui demander d'illustrer 2 (a – 2) et 2 a – 2 dans un contexte familier, les mosaïques (*activité citée en annexe*) par exemple, puis le laisser proposer une correction.



Un élève écrit : $a \times 2 + 3 = a \times 5$ (a pouvant prendre n'importe quelle valeur). On peut le faire écrire plusieurs expressions du périmètre du triangle ci-dessous.



- revenir aux propriétés des opérations (soustraire, c'est ajouter l'opposé …)

Ce retour au sens est essentiel car les élèves doivent être capables d'auto-contrôler leurs calculs. Or ces moyens de contrôle ne sont véritablement opérants que si les élèves les ont élaborés par eux-mêmes au sein des situations.

Nous devons donc tout mettre à profit pour favoriser la construction de ces automatismes : courts temps de « gammes », activités rapides, entrainements réguliers et ciblés, y compris à la maison, en fonction des besoins, utilisation de didacticiels « intelligents » (en fonction de leur analyse d'erreur possible). L'objectif est non seulement d'atteindre la maîtrise technique mais aussi d'acquérir une certaine efficacité et rapidité dans l'exécution.

A ce titre nous souhaiterions mettre d'emblée en avant une idée qui nous semble un peu novatrice, du moins pour nous : dans le cadre de la construction d'une technique calculatoire, il est très fructueux, voire souhaitable, de **différencier les attendus** et/ou **les objectifs retenus.**

Par exemple, au niveau de la mise en équation d'un problème en fin de collège et au lycée professionnel :

1) L'objectif que nous nous fixons pour **tous** nos élèves est **la résolution de problème** avec ou sans équation. C'est ce qui permet à tous de renforcer une maîtrise des quatre premiers items de la compétence 3 du socle commun.

2) **Certains** de nos élèves vont aller plus loin et parvenir à donner sens à la mise en équation (**comprendre l'intérêt du passage à l'équation pour résoudre le problème**). Pour d'autres ce n'est pas encore le bon moment. Nous ne baissons pas les bras mais nous pensons qu'il n'est sans doute pas opportun d'insister dans l'instant. En revanche nous veillerons à « repasser le plat » et donc nous proposerons à un autre moment une autre situation visant le même objectif.

3) Pour autant, la stratégie de résolution d'une équation peut faire l'objet d'une plénière et on ne s'interdira pas de demander à tout élève de reproduire cette résolution hors contexte. L'expérience prouve que certains élèves « rentrent dans le sens grâce à la technique ».
En outre, constater qu'on atteint ainsi une solution peut donner envie à certains élèves de se pencher avec plus d'enthousiasme sur le nouvel outil une prochaine fois.

4) Quelques élèves plus rapides vont avoir le temps de travailler un aspect de la résolution technique Nous pouvons donc leur donner, et à eux seulement, des **questions défi** consistant à résoudre des équations, pourquoi pas de plus en plus compliquées, et hors contexte, rien que pour construire l'habileté calculatoire. Sont alors à prévoir pour ces élèves des procédures de vérification afin qu'ils ne valident pas, dans le cadre de ce travail en autonomie, des procédures erronées.

Autrement dit **les compétences calculatoires travaillées peuvent ne pas être les mêmes pour tous les élèves**.

Une précision toutefois : Si cette prise de conscience de l'importance de la dialectique à faire vivre entre résolution de problème et acquisition de techniques, et aussi de l'intérêt qu'il y a à envisager l'acquisition de techniques sous l'angle de la différenciation pédagogique, nous a fixé clairement de nouveaux caps, pour autant nous ne prétendons pas parvenir à cela facilement
Nous nous y engageons toutefois résolument et nous efforçons d'avancer petit à petit, avec parfois des réussites mais aussi des échecs.

Quelques principes éclairent donc nos choix :

1 L'activité mathématique d'un élève fragile ne peut absolument pas se résumer à l'acquisition de technique calculatoire. Tout élève, y compris le plus fragile, doit prioritairement apprendre à résoudre des problèmes (ouverts).

2 Tout élève a besoin d'un minimum de technique mais il faut savoir doser les efforts.

3 Les élèves qui ont du potentiel peuvent avoir un entraînement technique supplémentaire. Ils auront besoin durablement d'une solide maîtrise calculatoire. (L'objet de notre réflexion ne porte que sur la maîtrise technique de l'habileté calculatoire, mais il va de soi que les élèves qui ont du potentiel doivent aussi être aussi stimulés par un entrainement supplémentaire sur la résolution de problème).

c) La contribution des outils numériques

- *Quel est le rôle des outils numériques dans la résolution de problèmes ouverts ?*

Les outils numériques (tableur, logiciel de géométrie dynamique, calcul formel, logiciel de programmation) libèrent l'activité des élèves en augmentant la palette des stratégies possibles pour étudier un problème et en trouver une solution, même si cette dernière n'est parfois qu'approchée.
Certains problèmes peuvent être entièrement résolus par des outils numériques (ex : recherche sur tableur d'un problème comportant un nombre fini de possibilités). D'autres encore, ne peuvent être traités qu'algorithmiquement. Voir activité « comptons les points ! ».

- *Les outils numériques peuvent-ils favoriser l'acquisition d'une compétence calculatoire algébrique ?*

Ce questionnement peut paraitre paradoxal (provocateur ?), cependant l'utilisation de formules tableur constitue souvent un premier pas vers la construction de formules algébriques. Par ailleurs pouvoir tester sur beaucoup de nombres, deux programmes de calcul différents, pouvoir affiner le pas pour approcher celui ou ceux qui permettent d'obtenir, avec les deux programmes, le même

résultat est une stratégie pédagogique efficace pour faire comprendre aux élèves le sens nouveau que prend le symbole « égal » dans une équation.
Un bémol :
Quand les élèves ont testé sur beaucoup de nombres avec le tableur, ils n'ont plus guère envie de se pencher sur la preuve. On constate en lycée que certains élèves préfèrent continuer à tester plutôt que de résoudre de façon algébrique une équation.

- *Quel rôle peut jouer le calcul formel dans l'acquisition d'une maîtrise des techniques algébriques ?*

Il est important que le recours au calcul formel ne soit pas systématique (comme l'utilisation de la calculatrice dans le cadre de l'apprentissage du calcul numérique). Quand la situation étudiée n'exige qu'un niveau de maîtrise technique abordable, un calcul algébrique réalisé à la main est toujours un attendu.
Toutefois l'expérience conduite en lycée tendrait à prouver que seuls les élèves qui ont déjà construit une certaine maitrise algébrique y ont recours spontanément.
Effectivement l'utilisation du calcul formel n'empêche pas la mobilisation chez l'élève de l'intelligence du calcul mais tout au contraire la favorise. Choisir la forme de l'expression algébrique adaptée à la question reste toujours de l'autonomie de l'élève. Cette mise à disposition d'un logiciel de calcul formel ne nous semble donc pas opposée à la volonté d'aller vers une meilleure maîtrise des techniques algébriques par les élèves.

Il est souhaitable que :

- ce recours soit possible pour résoudre des problèmes techniques complexes dont la résolution est acquise dans les cas simples.
- le nombre d'instructions à mobiliser par un élève soit restreint. L'attendu n'est pas que l'élève mémorise durablement un grand nombre de commandes (l'objet n'est pas la maitrise du logiciel), mais qu'il en connaisse l'existence et qu'il puisse en exprimer le besoin. Le professeur pourra alors rappeler la succession de touches qui correspond à cette commande.

- *Quel est le rôle des exerciseurs ?*

Certains exerciseurs peuvent contribuer pleinement à travailler la technique.
De qualité irrégulière, certains outils, notamment ceux comportant une certaine analyse d'erreur, peuvent permettre un travail en autonomie par les élèves pour travailler les compétences calculatoires algébriques (développements, réductions, factorisations, résolutions d'équations, de systèmes d'équations….).

D'une manière générale, les outils numériques offrent dans de nombreux cadres une piste de différenciation pour mettre en œuvre les activités proposées aux élèves.

2) Décryptage des programmes du collège

a) Précisions sur les attendus en classe de 6ème

Le programme de la classe de sixième n'explicite pas d'attendu particulier au niveau du passage à une formule ou des expressions littérales.

Toutefois il est important d'avoir présent à l'esprit que, plus tôt on familiarise les élèves à ce qui pourra prendre par la suite la forme d'une expression littérale, plus on leur donne de chance de s'approprier le passage à l'algèbre.

Une précaution à prendre : il ne s'agit pas d'anticiper sur le programme suivant mais simplement de préparer le terrain, de semer des graines.

Pour cela il est essentiel de ne jamais imposer le recours à une lettre. Tout élève doit pouvoir vivre par lui-même le passage à la lettre comme facilitateur pour exprimer sa pensée, son raisonnement.

Par exemple dans les activités sur les suites de nombres « premières marches » et « Empilons des cubes en 6ème »

Des mots pour le dire … sans que le passage à la lettre ne soit jamais imposé

- *Premier essai : « Pour faire une nouvelle pyramide j'ai besoin, pour la nouvelle base, de 4 cubes de plus que pour la base de la pyramide précédente ».*

  C'est long à dire !!! Comment faire plus court :

- *autres essais : « Base de la nouvelle pyramide = base de l'ancienne pyramide + 4 » ; « Nombre des cubes de la base de la nouvelle Pyramide = Nombre des cubes de la base de l'ancienne pyramide +4 » ou encore avec le tableur : « B3=B2+4 » « puis B4=B3 +4 » donc finalement « Nb cubes nvelle Pyr = nb cubes anc Pyr+4 » ou encore « Nn = Na + 4 » ….*

Pour préparer le passage au littéral il est important en classe de sixième de :

- **Renforcer le sens du symbole « = », écritures différentes d'un même nombre.**

  Objectif : Aider à mieux percevoir par la suite de nouveaux sens (entre deux expressions littérales, puis plus tard dans une équation) .

- **Renforcer le sens des opérations et les liens entre addition et soustraction d'une part, entre multiplication et division d'autre part.**

- **Approcher les équations sans formalisme.**

  Ex : recherche d'antécédents dans des programmes de calculs qu'on peut « remonter » ou par « tâtonnement intelligent » dans des programmes qu'on ne peut pas « remonter ».

b) <u>Précisions sur les attendus en classe de 5ème</u>

Extraits du programme

Expression littérale

- Utiliser une expression littérale.
- *Produire une expression littérale* *(non exigible du socle commun)*
- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités $k(a + b)= ka + kb$ et $k(a - b)= ka - kb$ dans les deux sens.
- ** Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités $k(a + b)= ka + kb$ et $k(a - b)= ka - kb$ dans les deux sens.* *(non exigible du socle commun en 5ième mais le sera en 4ième)*

Initiation à la notion d'équation : (La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun.)

- **Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.* *(non exigible du socle commun en 5ième mais le sera en 4ième)*

En fin de cinquième on vise prioritairement la maîtrise d'un sens du symbole « égalité » à savoir le « égal » qui <u>correspond implicitement à une quantification universelle (pour tout …)</u>.

Exemple :
Soit deux formules P = 3(L+ 2) et P = 3L + 6
Quelle que soit la valeur par laquelle je remplace L dans l'une et l'autre formule, j'obtiens toujours avec les deux formules le même résultat.
Je peux donc écrire : 3(L+ 2) = 3L + 6

- *On attend d'un élève de fin de cinquième qu'il ait compris ce qu'il fait quand il écrit 3(L+ 2) = 3L + 6 (il a présent dans sa tête la quantification)*
- *On attend donc aussi d'un élève au sortir de 5ième qu'il sache **de façon autonome** dire pourquoi en revanche 3(L+ 2) ≠ 3L + 2.*

*L'élève **doit prendre l'initiative de tester l'égalité**. Maîtrise implicite de la négation d'un « quel que soit ».*
*La maîtrise de ces **procédures d'auto-contrôle est essentielle.***

Les programmes de collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.

Le programme dit que la classe de cinquième correspond à une étape importante : **<u>travail sur les égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner.</u>**

En classe de cinquième on approche aussi un autre sens du symbole « = » : celui qui correspond à la question : *peut-on trouver une valeur pour L de sorte que, lorsqu'on remplace L par cette valeur dans les deux formules, les deux formules donnent le même résultat ?*

Ce sens du symbole « égalité », nouveau pour les élèves <u>correspond implicitement à une quantification existentielle (existe-t-il …?).</u>

Remarque : Il est essentiel de veiller à installer en classe de 5e une bonne maîtrise du calcul sur les nombres relatifs, car cette maîtrise est nécessaire à la poursuite de l'apprentissage du calcul algébrique

c) Précisions sur les attendus en classe de $4^{ème}$

Quelques élèves doivent avoir la possibilité de construire en 4^e l'attendu du programme de fin de cinquième. Le sens du symbole « égalité » : expressions égales

Extraits du programme

- Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités $k(a + b)= ka + kb$ et $k(a - b)= ka - kb$ dans les deux sens. *(Ce point n'était pas un exigible du socle commun en $5^{ième}$ mais il le devient en $4^{ième}$)*
- Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.

Développement

Réduire des expressions du type $3x -(4x-2)$, $2x^2 -3x + x^2$ *(non exigible du socle commun)*
Développer une expression de la forme $(a+b)(c+d)$

Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue. *Non exigible du socle commun. Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.*

L'apprentissage du calcul littéral est conduit très **progressivement** à partir de situations qui permettent aux élèves de **donner du sens à ce type de calcul** (voir activité « à vos ardoises en $4^{ème}$ » et « les lapins de Fibonacci »).

Le travail proposé s'articule autour de trois axes :

- **utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques**
- **utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; *(non exigible du socle commun)***
- **utilisation du calcul littéral et donc élaboration de formules pour prouver un résultat général *(non exigible du socle commun)***

Les situations proposées **doivent exclure tout type de virtuosité** et **viser un objectif précis** : résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général.
Les stratégies de résolution sont à motiver dans des situations où les raisonnements de type arithmétique deviennent compliqués. Par exemple la résolution d'une équation du type $ax+b=cx+d$. La stratégie de résolution repose sur le seul fait que l'on garde une égalité vraie quand on ajoute les deux membres d'une égalité par un même nombre : on aboutit alors à une équation du type $ax=b$ dont la solution est par définition même du quotient a/b). Voir activité « la calculatrice d'Alice ».

En $4^{ème}$ on privilégie la mise en équation d'un problème.

> **L'expertise à installer durant cette année de $4^{ième}$ est le développement – réduction, (nécessaire en particulier pour prouver un résultat général) et la mise en équation d'un problème.**
> **Ce travail est à mener de front avec la consolidation de la maitrise du calcul sur les nombres (nombres relatifs).**

Remarque : En début de $4^{ème}$, il est bon de consolider addition et soustraction sur les relatifs et pendant ce temps, de n'utiliser dans le calcul littéral que des coefficients positifs. On peut se passer assez longtemps des relatifs dans le littéral. Quand les relatifs sont bien en place, on peut aborder **progressivement** les points techniques suivants :

- L'opposé de a est noté $-a$. Le nombre $-a$ peut être positif autrement dit plus grand que 0
- $-a = a \times (-1)$ (quand on ajoute a et $a \times (-1)$ on trouve 0)
- $(-2) \times a = 2 \times (-a) = -(2 \times a)$ On peut écrire $-2 \times a$
- $2 \times a - 5 \times a = -3 \times a$
- $-(a - 2)$ est l'opposé de $a - 2$. $-(a - 2) = -a + 2$ (quand on ajoute $a - 2$ et $-a + 2$, on trouve 0)
- $4 - 2 \times (a + 3) = 4 + (-2) \times (a + 3) = 4 -2 \times a - 6$

Progressivité à construire aussi dans le développement avec des termes de degré 2,

- $(2 + a) \times (3 + a) = (2 + a) \times 3 + (2 + a) \times a$
- $(a - 2) \times (a - 3) = (a + (-2)) \times (a + (- 3)) =$…

d) Précisions sur les attendus en classe de 3ème

Extraits du programme

Ecritures littérales

Puissances

Factorisation (factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent)

Identités remarquables (les utiliser dans les deux sens)

Equations et inéquations du premier degré

Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues

Problème se ramenant au premier degré : équations produits

Ces attendus sont non exigibles du socle commun. Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

Quelle maitrise du calcul algébrique peut-on raisonnablement attendre d'un élève qui quitte le collège :

- **pour entrer en 2nde professionnelle**
- **pour entrer en 2nde générale et technologique**

De la 3ème vers le lycée professionnel

Un élève qui va poursuivre ses études en LP (2nde Pro) doit savoir

- Développer, réduire et ordonner une expression algébrique en utilisant le développement de $(a+b)(c+d)$.
- Factoriser une expression algébrique en observant un facteur commun.
- Résoudre une équation $ax+b = c$ en maitrisant le sens des opérations ou en remontant le programme de calcul.

> **L'essentiel est que ces élèves ne restent pas inhibés devant un problème et que face à une équation ils sachent s'organiser pour en trouver une solution approchée (tâtonnements, lecture graphique, utilisation de logiciels …)**

De la 3ème vers le lycée général et technologique

Un élève qui va poursuivre ses études en LGT (2nde GT) a besoin d'avoir automatisé le fait de

- Développer, réduire et ordonner une expression algébrique soit en utilisant le développement de $(a+b)(c+d)$, soit une identité remarquable.
- Factoriser une expression algébrique en observant un facteur commun ou en utilisant une identité remarquable.
- Résoudre algébriquement une équation du premier degré du type $ax+b=cx+d$. Les tâtonnements ne suffisent plus. (attention à distinguer : vérifier qu'un nombre est solution et résoudre une équation ie chercher toutes les solutions et donc nécessairement résoudre algébriquement)
- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

> **Une expertise au niveau de ces attendus du calcul algébrique est à installer dès la classe de troisième pour ces élèves. Ces résolutions algébriques ne doivent plus poser question, même si dans la classe certains élèves continuent à résoudre les problèmes de manière personnelle. Une très bonne maitrise du calcul sur les fractions est aussi un pré requis. Cela est essentiel pour aborder le travail sur les « fractions rationnelles » au lycée.**

3) Décryptage des programmes du lycée général et technologique :

a) Précisions sur les attendus en classe de 2^{nde} avec des activités possibles.

Extraits du programme

Expressions algébriques

Associer à un problème une expression algébrique

Identifier la forme la plus adéquate (factorisée, développée) d'une expression pour résoudre le problème

Développer, factoriser des expressions polynomiales simples

Transformer des **expressions rationnelles** simples

Equations

Résolution graphique et algébrique d'équations

Inéquations

Résolution graphique et algébrique d'inéquations

Résolution d'inéquation à partir du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. Par exemple déterminer le signe de $1-\frac{1}{x^2}$.

Géométrie

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes

Etablir la colinéarité de deux vecteurs

L'apprentissage proposé en classe de seconde générale au niveau du calcul algébrique doit selon nous, tout comme celui proposé tout au long des années collège, s'inscrire dans une logique de différenciation pédagogique. Nous considérons que nous devons en effet de tenir compte du fait que, dans cette classe de détermination, **la réussite durable de tous nos élèves ne nécessite pas le même niveau de maîtrise technique.**

> *Nos deux priorités :*
> - *que tout élève puisse s'approprier les outils mathématiques dont il aura besoin soit dans son quotidien soit pour réussir ses études.*
> - *que tout élève puisse se former (apprendre à réfléchir, à exercer son esprit critique) et construire des compétences (par exemple celles de résolution de problème) grâce à l'enseignement des mathématiques.*

Pour faciliter l'atteinte de cet objectif ambitieux, nous avons trouvé nécessaire de décliner la maitrise des attendus en calcul (algébrique ou pas) en **trois niveaux de maîtrise technique**.

Comme nous ne pouvons prendre appui sur un référentiel commun tel que le socle commun, **nous faisons des choix** qui tiennent compte à la fois des attentes de formation des différents cursus et des priorités de formation que nous nous donnons.

Nous travaillons ces trois niveaux de technicité en essayant de ne jamais perdre de vue le principe clef, particulièrement adapté aux élèves fragiles que nous rappelons ci-dessous :
« La formule ou la règle n'est pas ce qui permet d'apprendre plus vite. C'est ce qui permet d'aller plus vite quand on a compris. ». Nous limitons donc au maximum le nombre des formules à apprendre.

En revanche

> *Nous ciblons pour tout élève une aptitude à restituer certains automatismes indispensables pour la suite des apprentissages de **façon quasi réflexe** et surtout à **les mobiliser dans le cadre d'une résolution de problème**.*

Remarque : Travailler la maîtrise de certaines techniques calculatoires ne peut pas, selon nous, rester l'objectif du seul professeur de mathématiques. Penser cet apprentissage des techniques dans le cadre d'un contrat collectif entre professeurs de sciences nous semble la seule manière de :

- garantir la récurrence de l'entrainement nécessaire à certains élèves
- faciliter le transfert nécessaire : l'objectif visé est l'aptitude des élèves à mobiliser ses acquis mathématiques dans des situations qui ne sont pas des problèmes de mathématiques (économique, biologique, physique, emprunté au domaine de la gestion …).

Niveau 1 de technicité : (maîtrise de base)

1 Une solide maitrise de l'affine

- Etre capable de donner sans hésitation, <u>sur des exemples numériques</u>, la valeur qui annule *a x+ b* et le signe de *a x+ b* suivant les valeurs de *x* <u>en prenant appui sur un court raisonnement ou sur l'allure d'une droite.</u>

    Nous évitons

    - l'unique recours à la mémorisation et à l'application de formules auxquels certains élèves voudraient se cantonner. Nous savons en effet d'expérience que cela ne garantit pas leur aptitude à rectifier par eux-mêmes des erreurs
    - nous évitons aussi d'imposer à tous une institutionnalisation posée dans le cas général. Notre priorité est que les élèves fragiles sachent traiter n'importe quel exemple numérique.

- maîtriser la proportionnalité entre les accroissements de la fonction et ceux de la variable.

    - Enjeux déterminant pour la poursuite du cursus terminal : Par exemple en première, construction d'une droite passant par un point donné et de pente donnée, lecture graphique du nombre dérivé, détermination d'une équation de la tangente *via* un court raisonnement prenant appui sur le sens ($\Delta x \xrightarrow{\times f'(a)} \Delta y$ et donc $y - f(a) = f'(a) \times (x - a)$) ce qui évite la mémorisation d'une formule, souvent source de multiples erreurs (du type $y = f(a)(x-a) + f'(a)$).

- maîtriser la résolution d'une équation simple du premier degré dans des contextes empruntés à d'autres champs disciplinaires.

    - Par exemple à partir de la formule $U = RI$ (vue en quatrième en Physique et chimie) exprimer R ou I en fonction des deux autres

2 Maîtriser les calculs sur les puissances de 10

Maîtrise à entretenir et à travailler en collaboration avec les autres disciplines dont les SCP :
Cette maîtrise est essentielle en première professionnelle.
Là encore la priorité que nous nous donnons est la construction de l'autonomie qui passe par un retour à un cas simple et à la définition.

Par exemple plutôt que de rappeler, autant que de besoin, une propriété telle que : Pour tous entiers relatifs n et p, $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$, nous encourageons un élève qui butte sur un calcul du type $10^{12} \times 10^{-5}$ à retrouver par lui-même la stratégie calculatoire adaptée en revenant à un cas simple : Si j'avais eu à calculer $10^2 \times 10^{-1}$, j'aurais calculé $10 \times 10 \times \frac{1}{10}$ et trouvé 10 soit 10^{2-1}.

3 Une solide maîtrise du développement

4 De premiers acquis sur le second degré

Enjeux : faciliter la maîtrise de la résolution des équations et des inéquations du second degré objectif clef de toutes classes de première.

- Avoir bien intégré que un carré auquel on ajoute quelque chose c'est plus grand que le quelque chose. Par exemple pour tout nombre x, $(x-2)^2+3 \geq 3$ ou encore $(x-2)^2-1 \geq -1$ ou encore $1-(x+2)^2 \leq 1$. Avoir compris cela en le mettant en lien avec l'allure de la courbe représentative de la fonction polynôme du second degré correspondante participe de l'intelligence du calcul qui nous semble nécessaire à tous et qui permet avec les seuls acquis de seconde de donner les variations de la fonction. Par exemple la fonction $x \longrightarrow (x-2)^2+3$ a pour minimum 3, minimum qui est atteint en 2. Donc la fonction est décroissante sur] $-\infty$;3] et croissante sur [3, $+\infty$[.

- Savoir qu'un produit de facteurs s'annule si, et seulement si, l'un ou l'autre des deux facteurs est nul. Par exemple $-2(x+1)(x-3)$ **ne** s'annule **qu'en** –1 et 3.

- Savoir résoudre une équation du type $x^2 = a$ et une inéquation du type $x^2 > a$ avec un support graphique et a <u>étant une valeur numérique donnée.</u> Savoir que l'équation $x^2 = -3$ n'a pas de solution.

5 Savoir utiliser l'effet sur l'ordre d'une fonction monotone

Notre priorité est que tout élève puisse utiliser sur des exemples numériques la connaissance qu'ils ont du sens de variation d'une fonction pour comparer deux nombres.

Par exemple savoir comparer π^2 et 3^2, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$, ou encore $f(\sqrt{2})$ et $f(3)$ connaissant le sens de variation de f sur l'intervalle] $-\infty$;3].

Niveau 2 : (maîtrise intermédiaire)

On ajoute aux acquis du niveau de base les maitrises suivantes

1) Maîtriser solidement la **résolution algébrique d'une équation du premier degré** (le tâtonnement ne suffit plus). L'élève sait toujours conduire en cas de besoin un raisonnement du type arithmétique pour résoudre une équation telle que $-3x+7=0$ ($-3x$ ajouté à 7 donne 0 donc $3x=7$ et x est le nombre qui multiplié par 3 donne 7 donc $x=\frac{7}{3}$). Mais il a compris l'intérêt d'une résolution algébrique pour une équation du type $ax+b=cx+d$ et conduire cette résolution en se ramenant au niveau 1 n'est plus un obstacle pour lui.

2) Maîtriser solidement la résolution algébrique **d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues** (même si la stratégie utilisée plus spontanément consiste à exprimer y en fonction de *x* et à se ramener à une équation du premier degré à l'inconnue *x*).

3) Savoir résoudre une inéquation du premier degré.

4) **Une maîtrise de la factorisation d'une expression polynomiale** quand un facteur commun est apparent ou que l'on peut reconnaître une identité remarquable.

   Par exemple savoir factoriser x^2-2x, $3(x-1)^2-(x-1)$, $(x+1)^2-4$

5) Maîtrise du second degré

   En plus des acquis de base savoir discuter le nombre de solutions de l'équation $x^2=a$ suivant les valeurs de a

6) Une bonne maîtrise du **lien entre forme d'une expression et informations portées par la courbe associée.**

   Par exemple

   - Faire le lien entre l'existence de point(s) commun(s) à la courbe et à l'axe des abscisses et la forme de l'expression. Il semble que la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} -2x^2+4x+6$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points d'abscisse –1 et 3. On peut donc faire l'hypothèse que $f(x)$ puisse s'écrire sous la forme $f(x)=?(x+1)(x-3)$ avec $?=-2$. On le prouve en développant $-2(x+1)(x-3)$.

   - La fonction polynôme du second degré a un minimum égal à –1 atteint en la valeur 2. Donc $f(x)$ peut s'écrire sous la forme « –1 plus quelque chose qui dépend du carré de $x-2$ ». Soit $f(x)=?(x-2)^2-1$

7) Maîtriser l'effet sur l'ordre d'une fonction monotone

   Par exemple en plus des attendus de base savoir comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{2}$ sachant que a est un nombre strictement positif, comparer b^2 et 9 sachant que b est un nombre positif ou encore proposer de bons encadrements.

Niveau 3 : (maîtrise experte qui peut même aller au delà de l'attendu du programme)

1 Savoir développer, réduire et factoriser une expression **polynomiale** (même si le facteur commun n'est pas tout à fait apparent)

2 **Disposer d'une solide maîtrise de la résolution d'équation et d'inéquation du premier degré** y compris quand le travail est à faire sur des formules dans lesquelles l'inconnue ne s'appelle pas *x*

3 Savoir mettre au même dénominateur **deux fractions rationnelles** simples.

4 **Savoir choisir la forme de l'expression la mieux adaptée au problème** (par exemple savoir comment transformer une expression pour étudier son signe.) Enjeux majeur pour l'étude du signe d'une dérivée.

5 Savoir faire la distinction entre avoir trouvé une solution à une équation et les avoir trouvées toutes et **avoir bien intégré qu'un problème n'a pas toujours une unique solution.**

6 Maîtriser l'effet sur l'ordre d'une fonction monotone

Par exemple en plus des attendus précédents

- savoir comparer par exemple $\frac{-2}{a+1}$ et $\frac{-2}{b+1}$ a et b étant deux nombres de l'intervalle]-1 ; $+\infty$[tels que $a<b$, en utilisant l'effet sur l'ordre des fonctions de référence. Mais il s'agit davantage d'une aptitude à réagir sainement face à une question sur laquelle on aurait pas proposé un entraînement systématique.
- savoir ce qu'il faudrait démontrer pour prouver qu'une fonction f est décroissante sur l'intervalle [-1 ; 2].

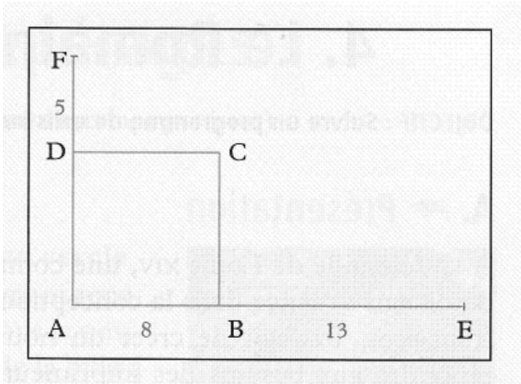
7 Dans une formule, empruntée à d'autres disciplines, qui lie plusieurs quantités, exprimer l'une de ces quantités (même si elle ne s'appelle pas x) en fonction des autres

Exemple sur deux situations d'une différenciation des attendus liée à cette prise en compte des différents niveaux de maîtrise

<u>Situation 1 : L'exercice « 5, 8, 13 » et l'exercice « des deux triangles équilatéraux et du carré ».</u>

Enoncé 1 : ABCD est un carré de côté 8. Le point E de la demi- droite [AB) est tel que : BE=13.

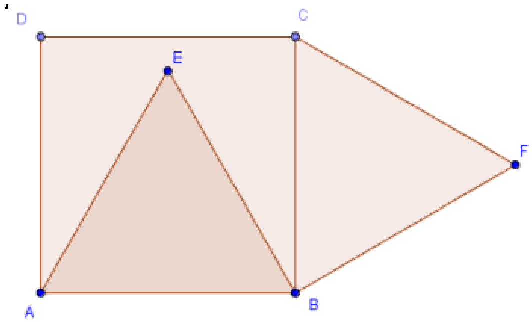
Le point F de la demi-droite [AD) est tel que DF=5. Les points F, C et E sont-ils alignés ?



Enoncé 2 :

On considère un carré ABCD et les triangles équilatéraux ABE et BCF.

Les points D, E et F sont-ils alignés ?



Commentaires :

L'une des stratégies possibles, et efficaces, pour résoudre l'une ou l'autre de ces deux situations est d'introduire un repère et de vérifier si des vecteurs sont, ou ne sont pas, colinéaires.

Posés sous cette forme, et donc sans indication de méthode, ces deux situations offrent l'une comme l'autre une occasion pour tout élève d'élaborer une stratégie de résolution consistant par exemple à penser à introduire un repère, à choisir un repère adapté et à vérifier s'il y a ou non colinéarité de deux vecteurs.

Dans le cas du premier les nombres mis en jeu rendent simple le fait de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FE}$. Une difficulté résidera dans l'étude de la colinéarité des deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 21 \\ -13 \end{pmatrix}$ ce qui peut offrir une bonne occasion, si la proportionnalité n'est pas mobilisée, de travailler sur la logique : existe-t-il ou n'existe-t-il pas un nombre réel k tel que $21 = 8 \times k$ **et** $-13 = (-5) \times k$?

Dans le cas du second, si on travaille bien le même type de problème, le calcul des coordonnées des points E et F peut se révéler techniquement délicat pour certains élèves.

L'étude de la colinéarité des deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ qui pose celle de l'existence ou non d'un réel k tel que $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = k \times \frac{1}{2}$ **et** $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = k \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)$ offre une belle occasion pour des élèves qui ont du potentiel de travailler des calculs plus complexes.

Nous n'hésitons pas dans une logique de différenciation pédagogique à proposer le premier à certains élèves et le second à d'autres. Nous faisons ainsi travailler à tous les mêmes compétences de résolution de problème, leur faisons mobiliser les mêmes savoirs mathématiques mais le niveau de maîtrise technique nécessaire à la résolution de l'un ou de l'autre n'étant pas de même nature, nous mettons plus aisément chaque élève en situation de réussir.

On peut aussi proposer les deux situations à tous, dans des contextes différents (y compris travail personnel en autonomie avec quelques aides mis à disposition des élèves sur l'ENT de l'établissement)

Situation 2 : Soit à rechercher tous les nombres réels non nuls x tels que $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

Au delà du travail visant à faire acquérir une maîtrise des fondamentaux précédents, nous veillons à ce **que le calcul reste bien une occasion pour tout élève de raisonner quelle que soit la méthode.**

Un élève, qui ne dispose pas d'une bonne maîtrise calculatoire, peut résoudre le problème en raisonnant de diverses manières

- en utilisant la connaissance du sens des variations de la fonction inverse et en travaillant sur un « schéma codé » de la courbe (schéma sur lequel l'information portée au niveau des variations est fiable car acquise). L'ensemble des solutions peut alors être lu.

- par disjonction des cas : un nombre x négatif ne peut pas convenir (son inverse est négatif et ne peut donc pas être plus grand que $\frac{1}{2}$) donc les solutions sont à chercher parmi les nombres strictement positifs. Si x est strictement positif et que $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ alors $x < 2$. Les solutions sont donc dans l'intervalle]0 ; 2[. Mais si $0 < x < 2$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. Donc les solutions sont tous les nombres de l'intervalle]0 ; 2[.

Un élève, qui a de bonnes aptitudes en mathématiques, doit pouvoir le résoudre aussi en conduisant le calcul algébrique qui s'impose une fois le problème traduit en la recherche de tous les nombres x tels que $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0$ soit encore $\frac{2-x}{2x} > 0$.

Nous considérons qu'un élève qui a eu la possibilité de trouver toutes les solutions en prenant appui sur la connaissance qu'il a de la courbe de la fonction inverse a été pleinement en apprentissage. Nous poussons un élève qui a du potentiel à résoudre cette inéquation de plusieurs manières y compris algébriquement. Mais cette résolution algébrique ne s'imposant pas dans le cadre de cet exemple, nous évitons de la présenter en plénière.

b) Précisions sur les attendus en classe de 1ère *scientifique (S et STI) avec des activités possibles.*

Dans le cycle terminal scientifique nous nous efforçons de tenir compte également du fait que l'aptitude calculatoire des élèves de ces classes est, elle aussi, hétérogène et que leur besoin à vis à vis des mathématiques, et vis à vis de la maitrise technique en particulier, n'est pas le même pour tous. Nous essayons donc d'inscrire, en classe de première S ou STI aussi, cet apprentissage dans une logique de différenciation pédagogique**.**

La priorité que nous nous donnons est que tout élève puisse s'approprier les outils mathématiques dont il aura besoin soit dans son quotidien soit pour réussir ses études.

Quelques exemples de la différenciation pédagogique que nous conduisons au niveau de la maîtrise calculatoire :

Nous travaillons de façon anticipée des calculs du type

- f(a+h), f(a+h)-f(a) etc …afin que lorsque nous souhaiterons formaliser la définition d'une fonction dérivable en un nombre a et que donc nous aborderons l'étude de la limite du taux d'accroissement, la technique n'occulte pas la compréhension de la notion.
- f(n+1) , f(n+1)-f(n) pour préparer le travail sur les suites numériques

Dans le cadre du travail sur l'erreur, installer petit à petit que **tout n'est pas linéaire** :

- inverse, carré et inverse d'une somme…
- dérivée du produit (du quotient) qui n'est pas le produit (du quotient) des dérivées,
- cosinus (a+b) qui n'est pas la somme des cosinus de a et de b …

Niveau de technicité 1 :

1. Savoir résoudre une équation du second degré

2. Avoir compris que
   - toute fonction n'est pas une fonction polynôme de degré 2
   - qu'il est parfois beaucoup plus simple de résoudre une équation de degré 2 sans utiliser des formules

3. **Maîtriser le lien entre la forme de l'expression algébrique et la courbe**. Tout élève de série S doit parvenir à mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 donné, **la méthode utilisée pouvant consister à prendre appui sur l'articulation graphique et forme de l'expression.** En STI 2D mettre sous forme canonique n'est pas une capacité exigible mais le faire en prenant appui sur l'allure de la courbe représente un excellent apprentissage

4. Avoir une connaissance de type réflexe du signe d'un polynôme de degré 2 donné **prenant appui sur une maîtrise de l'allure de la parabole** dans tous les cas possibles : a strictement positif ou strictement négatif, Δ strictement positif ou bien nul ou bien strictement négatif.

   Nous demandons régulièrement aux élèves de donner l'allure de la parabole lorsque par exemple $a > 0$ et $\Delta < 0$.

5. Savoir que **comparer deux nombres,** quand on n'a pas d'autres idées (telle la connaissance du sens de variation d'une fonction), **revient à étudier le signe de leur différence.** Enjeux : préparer l'étude de la position relative de deux courbes.

6. Conforter l'intelligence du calcul. Savoir choisir la **forme de l'expression la mieux adaptée au problème à résoudre** que ce soit dans le cadre de la résolution d'une équation ou d'une inéquation, de l'étude des variations d'une fonction ou d'une suite.

7. Obtenir une solide maîtrise **du sens** de la dérivée.
   Lien entre nombre dérivé et tangente (savoir construire une tangente et lire graphiquement un nombre dérivé)
   Savoir dans le cadre d'une résolution de problème identifier le besoin d'une fonction dérivée quitte à ce que l'on lui la donne.
   Faire la distinction entre signe de la fonction et signe de sa dérivée

8. Garantir une bonne connaissance des formules de dérivation et une aptitude à les utiliser pour calculer, **dans des cas simples**, une fonction dérivée. Cela impose d'y revenir souvent et pendant une période longue.

Niveau de technicité 2 :

En plus des acquis précédents

Travailler la compréhension de l'intérêt de la dérivation pour caractériser la croissance (Cela croit certes mais cela croit comment ? vite, pas vite ?).

Travailler, dans le cadre d'une fonction simple, la stratégie à adopter pour retrouver **par étude locale** un nombre dérivé (savoir ce qu'il faut faire même si la réalisation technique n'est pas totalement aboutie par l'élève).

1. **Viser une connaissance ou une aptitude de type réflexe**
   - des nombres dérivés des fonctions de référence et des formules de dérivation,
   - à dériver une fonction polynôme ou une fonction rationnelle donnée et **à conduire le calcul algébrique qui s'impose** pour exploiter l'expression obtenue.
   - à étudier le sens de variation d'une suite

2 Savoir mettre sous forme canonique <u>algébriquement</u> un polynôme de degré 2 donné

3 Savoir comment étudier la position relative de deux courbes : connaitre la stratégie (calcul de la différence f(x)-g(x)) et être capable d'engager le calcul algébrique nécessaire pour aboutir à une étude de signes simple, même si la réalisation technique n'est pas parfaitement aboutie (nous n'hésitons pas à donner des aides à certains élèves).

Niveau de technicité 3

1 Savoir mettre une expression algébrique sous la forme adaptée pour étudier son signe y compris dans des cas un peu compliqués.

2 Savoir retrouver **par étude locale** un nombre dérivé

3 Comprendre qu'une fonction n'est pas toujours dérivable en tout point (maîtrise des deux contre-exemple du programme à savoir la fonction valeur absolue en 0 et la fonction racine carré en 0). Enjeux pour la terminale S ; toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

4 Savoir mettre algébriquement sous forme canonique un polynôme de degré 2 **y compris dans le cas général** ax^2+bx+c**.**

5 Savoir étudier de façon autonome la position relative de deux courbes

Trois exemples de différenciation des attendus liée à cette prise en compte des différents niveaux de maîtrise

Exemple 1 : Zoom sur la mise sous forme canonique des fonctions polynômes du second degré.

Niveau 1 : mettre sous forme canonique de x^2+x+5
Nous attendons qu'un élève sans facilité particulière n'hésite pas à utiliser les connaissances de seconde (observation de la courbe, axe de symétrie conjecturé, ordonnée du point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ calculée) , puis à proposer l'expression $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$ et à vérifier qu'elle convient en développant.
Remarque : C'est le maximum que l'on peut atteindre d'un élève de STI2D.

Niveau 2 : Mettre sous forme canonique $2x^2+4x+10$
Nous attendons qu'un élève sache qu'il faut commencer par écrire l'expression sous la forme $2(x^2+2x+5)$ et reconnaître le début d'une identité remarquable et conclure en cohérence.

Niveau 3 : Mettre sous forme canonique ax^2+bx+c
Nous encourageons un élève qui a du potentiel à maîtriser la démonstration dans ce cas général (enjeux : l'habituer à maîtriser la disjonction des cas et les différents statuts de lettre).

Exemple 2 : Zoom sur les fonctions homographiques : (de la seconde et la première…)

Si nous demandons aux élèves d'étudier, <u>sans aucune autre indication et sans aucun travail préalable</u>, la fonction f définie par $x \longrightarrow \frac{2x+7}{x+3}$, nous souhaitons obtenir que

Niveau 1 : tout élève sache

- observer la courbe, identifier que les droites d'équation $x=-3$ et $y=2$ jouent un rôle important et conjecturer les variations
- vérifier que $2+\frac{1}{x+3}$ est une autre écriture de $f(x)$ (on la lui a donnée)
- trouver ce qu'il faudrait faire pour prouver que la fonction est décroissante sur]-3, +∞ [.

Niveau 2 : certains élèves, de façon tout à fait autonome, pensent à calculer $f(x)-2$ pour prouver que 2 n'a pas d'antécédent et obtenir une autre écriture de $f(x)$.

Niveau 3 : que **pour préparer l'avenir** de ceux qui vont continuer en mathématiques (le calcul de limites et de primitives), certains élèves parviennent à

- décomposer « en éléments simples » une fonction homographique, que ce soit avec un support graphique ou avec raisonnement algébrique : pour tout nombre x, $2x+7=2(x+3)+1$ (« combien de fois » $x+3$ dans $2x+7$?) et donc $\frac{2x+7}{x+3}=2+\frac{1}{x+3}$.
- démontrent que la fonction est décroissante sur]-3, +∞ [par travail sur l'ordre de trois fonctions de référence.

Exemple 3 : Zoom sur l'apprentissage de la dérivation…

Pour éviter qu'une maîtrise insuffisante de l'habileté calculatoire ne fasse obstacle durablement à l'appropriation de la notion clef que représente la dérivation, nous optons pour faire du travail sur cette notion un fil rouge sur l'année de première et nous aménageons trois grands passages sur cette notion en privilégiant une entrée concrète.

Dans un premier temps notre priorité est la construction de la compréhension de ce qu'est le nombre dérivé.

Pour cela nous **faisons une approche très concrète de la notion consistant**

- à utiliser le logiciel de géométrie Géogébra qui permet très aisément de construire la droite tangente à la courbe d'une fonction en l'un de ses points (nous ne soulevons pas le problème de l'existence de cette tangente) qui peut être mobile et de visualiser la pente de cette droite.
- à aborder la notion d'accroissement instantané d'une fonction
- à associer très vite à une fonction sa fonction dérivée (fonction qui à tout nombre a associe la pente de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a) nous donnons simplement **à voir les choses** sans **aucun préalable technique** de calcul de taux.
- à donner à comprendre le lien entre sens de variation de la fonction et signe de sa fonction dérivée.

En parallèle nous travaillons en activités rapides la maîtrise calculatoire qui sera nécessaire:

- calcul et lectures de coefficients directeurs de droites,
- notion de vitesse moyenne (pour glisser vers la vitesse instantanée, …),
- écart entre *f* (3) et *f* (2), entre *f* (2 + *h*), et *f* (2), ……

Puis nous confrontons très vite les élèves à des problèmes qui nécessitent de connaître le sens de variation d'une fonction.
Il s'agit de problèmes variés (y compris empruntés aux autres disciplines) dans lesquels on est amené à modéliser une situation par une fonction.

- Si la fonction est d'un type connu (2nd degré), l'élève est outillé pour étudier cette fonction
- Si en première S la fonction est du type $\sqrt{u}$ ou $1/u$, avec u une fonction connue, l'élève est en capacité d'étudier les variations de la fonction.
- Sinon, dans toute série, l'élève sait qu'il existe, liée à cette fonction, la fonction dérivée qui traduit « l'accroissement » de cette fonction. Si l'élève nous en fait la demande nous lui donnons l'expression de cette fonction. (il ne sait pas encore la calculer)

Quelques remarques

→ On peut ainsi très vite remobiliser le second degré avec des études de signes

→ On peut travailler le calcul algébrique **sans cumuler trop de difficultés en même temps** : l'élève se concentre sur l'expression à obtenir pour mener une étude de signe ;

Un exemple (très classique !) : Un volume de boîte sans couvercle qui se modélise sur [0 ; 12] par : $f(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$, x étant la hauteur de la boite.
L'expression de la dérivée est donnée à qui la demande : pour tout x de [0 ;12], $f'(x) = 12x^2 - 192x + 576$.
On remobilise les connaissances sur le second degré. Il s'agit de déterminer le signe de f' Les valeurs numériques qui interviennent ne facilitent pas le recours à la représentation graphique. Le recours au traitement algébrique s'impose.

Nous constatons que ce faisant, nos élèves ne buttent plus sur l'obstacle technique que représente le calcul de (f(a+h)-f(a))/h et de sa limite quand h tend vers 0. Il s'agissait là d'une difficulté majeure de nature à faire décrocher beaucoup d'élèves.
Nous choisissons d'y revenir dans un second temps

Dans un second temps, nous commençons à construire l'autonomie des élèves face au calcul de dérivées.
On apprend aux élèves comment obtenir par eux-mêmes l'expression du nombre dérivé d'une famille de fonctions **(**pas nécessairement tous les types de fonction d'un coup **!).**

Par exemple :
Nous conduisons nos élèves, de façon autonome,

- à déterminer la fonction dérivée d'une fonction affine, ce qui offre une bonne occasion de revenir sur l'interprétation géométrique du nombre dérivé et donc d'en garantir un peu mieux la maitrise.
- A conjecturer la fonction dérivée d'une fonction polynôme (expression trouvée à partir de l'observation d'un nuage de points – trace des pentes de tangentes)

Nous institutionnalisons le lien entre le taux d'accroissement en *a* d'une fonction et le nombre dérivé de la fonction en *a* et nous démontrons avec les élèves certains résultats (nombre dérivé en *a* de la fonction carré, de la fonction cube, de la fonction inverse par exemple).

Suivant le potentiel en calcul de nos élèves nous nous limitons à

- faire conjecturer des résultats,
- établir quelques résultats,

- admettre très vite les propriétés.

Notre priorité consiste **à outiller nos élèves** pour qu'ils résolvent des problèmes (c'est le cas en STI2D)

Avec les élèves scientifiques, outre le fait d'établir certains résultats permettant de calculer des nombres dérivés et de les conduire à en établir par eux-mêmes, nous présentons le principe permettant d'en obtenir d'autres (dérivée d'une somme par exemple).

A la fin de ce second temps nos élèves savent dériver n'importe quelle fonction polynôme.

*Dans un troisième temps **nous finalisons l'attendu au niveau du calcul de dérivées par l'appropriation des formules de dérivation du produit et du quotient (présentation des principes qui permettent de justifier les résultats qui ouvrent la voie à l'étude de fonctions rationnelles)***

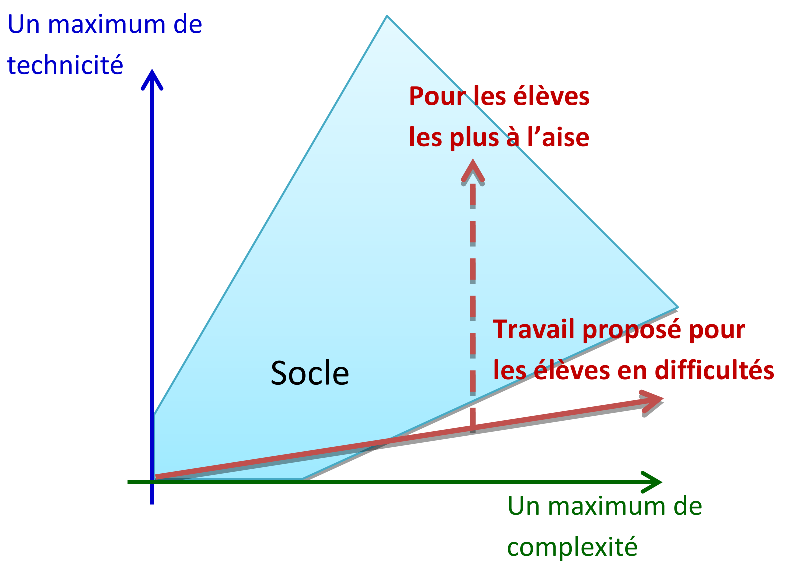
Conclusion

Ce document s'est donné pour objectif de formaliser quelques pistes pédagogiques de nature à renforcer la construction chez les élèves des compétences calculatoires attendues au niveau de l'algèbre. Nous avons voulu préciser le rôle des problèmes ouverts dans cette construction et analyser ce que les TICE pouvaient apporter à cet apprentissage. Nous tenons toutefois dans cette conclusion à rappeler que cette étude n'a le recul que de deux années.

Nous avons acquis plusieurs convictions :

- Construire des compétences calculatoires n'est pas une fin en soi. Viser cet objectif ne doit en aucun cas occulter l'objectif prioritaire qu'il faut garder pour tous les élèves, y compris le plus fragile : lui faire résoudre des problèmes car **faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes.**

  Sont donc à trouver :
  - des situations permettant à tout élève de résoudre des problèmes, avec ou sans le recours à l'algèbre,
  - des problèmes qui, s'ils imposent de mobiliser l'algèbre, ne nécessitent pour autant pas une maîtrise technique importante.



Le schéma ci-contre résume la philosophie de nos travaux avec les élèves :

- Il y a ce que nous considérons comme **INCONTOURNABLE** : que chaque élève, y compris le plus fragile, soit en activité de résolution de problème.
- Et il y a ce qui nous parait **SOUHAITABLE** : qu'un élève puisse résoudre un problème pleinement, en utilisant une stratégie experte, et donc souvent algébrique.

Ainsi, les travaux à privilégier pour les élèves fragiles vont vers **moins de technicité** opératoire et algébrique mais font la part belle à la **complexité des problèmes** à résoudre (problèmes concrets, problèmes ouverts, taches complexes). Cependant, à aucun moment nous n'oublions que toute situation de recherche est une bonne occasion pour travailler aussi la technique. Et nous ne manquons pas les occasions permettant aux élèves les plus rapides de monter en compétence technique.

- Construire des compétences calculatoires ne doit pas être déconnecté des situations qui lui donnent sens.

- Nos élèves qui parviennent à penser algébriquement la résolution d'un problème, et qui vont avoir besoin des mathématiques pour réussir leur parcours de formation, doivent avoir la possibilité d'acquérir les automatismes en calcul sans la maîtrise desquels ils rencontreront des difficultés dans la poursuite de leurs études. L'entrainement technique de ces élèves peut être (doit être ?) plus poussé.

En outre, pour la liaison collège - lycée un regard particulier doit être porté sur les élèves de 3ème. Nous gardons présent à l'esprit que, dans le cadre du socle commun de connaissances et de compétences, l'exigence pour tous nos élèves quittant le collège est bien de les rendre capables de résoudre un problème, si besoin est avec des procédures personnelles. Mais il convient pour les élèves qui, en fin de 3ème expriment le souhait de poursuivre leurs études en 2nde générale et technologique, de faire atteindre une certaine maîtrise des compétences algébriques décrites dans les programmes de 3ème, et cela tout particulièrement si leur projet d'étude les destine à des filières dans lesquelles les mathématiques ont une place importante.

Nous avons, grâce à cette réflexion, acquis la conviction que la construction des compétences calculatoires doit être pensée dans une logique de différenciation pédagogique.

Il s'agit bien pour nous d'un nouveau cap à suivre, cap qui guide nos choix, mais vers lequel nous ne cheminons que pas à pas.

ANNEXE

Une situation pour permettre aux élèves de travailler sur des expressions littérales dès la 5e

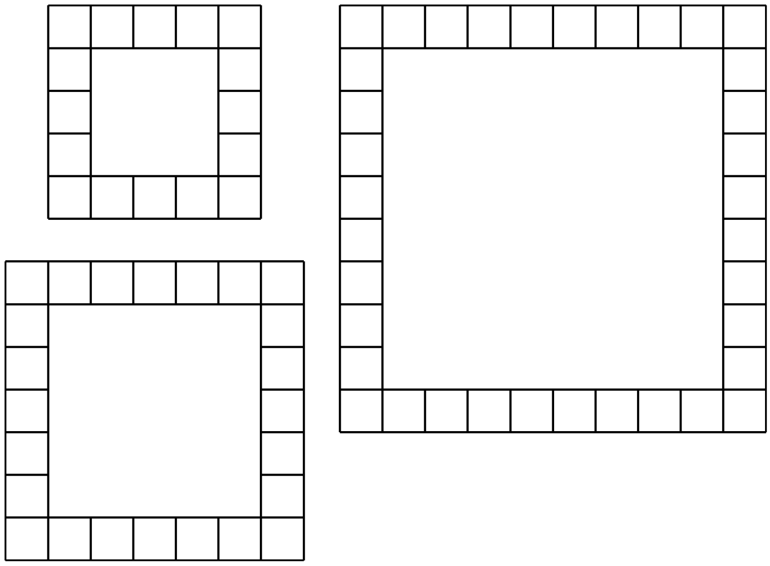
Activité 1

Pierre joue avec des carreaux de mosaïques. Il dispose ses mosaïques pour obtenir des «carrés ».

En voici trois ci-contre.

Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de mosaïques il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.

Pouvez-vous l'aider ?



Commentaire

Pour aider Pierre, les élèves expliquent, d'abord en français, comment il peut s'y prendre pour savoir combien il faut de mosaïques pour fabriquer n'importe quel grand carré.

Un exemple de phrase écrite par les élèves : *Pour trouver le nombre de mosaïques pour fabriquer n'importe quel carré, on multiplie le nombre de mosaïques sur un côté du carré par 4 et on retire 4 (pour éviter que les mosaïques des coins soient comptés deux fois).*

On peut alors insister sur les difficultés rencontrées par les élèves pour rédiger leurs explications en français. Il est possible d'indiquer que les mathématiciens ont inventé un moyen plus pratique pour rendre compte d'un tel travail : ils fabriquent des formules et inviter les élèves à essayer.

Les élèves élaborent alors progressivement des formules très diverses, en rapport avec leur stratégies de comptage.

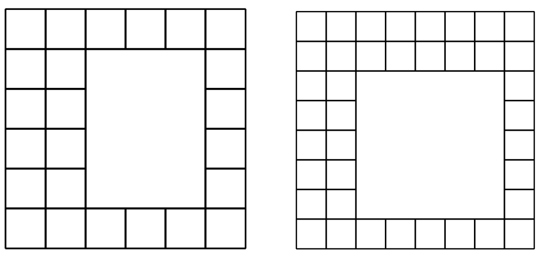
ex : $c+(c-2)+c+(c-2)$; $(c-1)\times 4$; $a\times 4-4$; $b+(b-1)+(b-1)+(b-2)$; $\textit{côté}\times 4-4$ etc

On peut proposer d'autres stratégies de comptage que celles trouvées par les élèves et demander aux élèves d'élaborer les formules qui correspondent.

Les formules sont critiquées, améliorées, testées, comparées, mises en lien, utilisées …

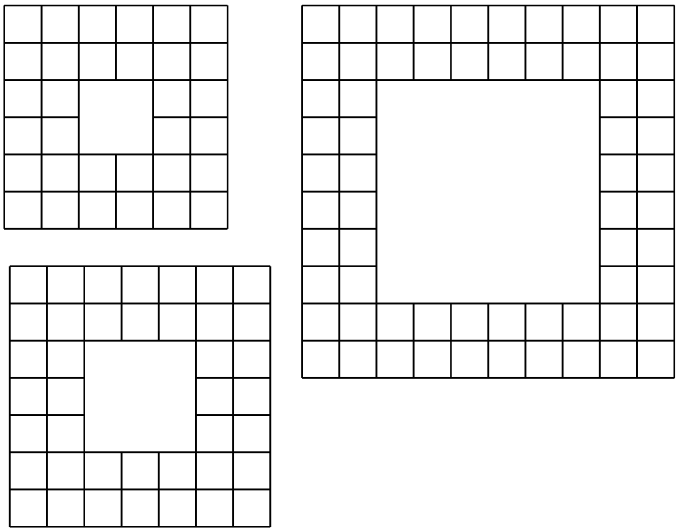
Plus tard on peut reprendre un travail analogue avec d'autres familles de carrés (ci-contre).

C'est l'occasion pour les élèves plus lents de revisiter ce qui leur a posé problème la première fois.



Une autre activité peut être donnée **quelques semaines plus tard**.

Pierre décide de border ses carrés de deux rangs de mosaïques.



Pour l'aider, les élèves d'une autre classe ont écrit des formules qui donnent le nombre de mosaïques nécessaires en fonction du nombre de mosaïques sur un côté du carré à fabriquer.

Voici leurs formules :

$c\times 8-16$	$(c\times 4-4)+(c\times 4-12)$
$c\times 4+(c-2)\times 4-8$	$(c-4)\times 8+16$
$c\times 4+(c-4)\times 4$	$(c-2)\times 2\times 4$
$c+c+(c-4)\times 2+c+c+(c-4)\times 2$	

Peut-on valider ces formules ?

Commentaire

Les débats permettent de réaffirmer (déjà mis en évidence lors des activités précédentes) :

- qu'un test ne suffit pas pour valider une formule ;
- qu'un test suffit pour rejeter une formule ;
- qu'on a deux méthodes pour prouver qu'une formule est correcte (en trouvant la façon de compter associée et en montrant qu'on a bien compté toutes les mosaïques ou en faisant du « calcul littéral »).

Quelques semaines plus tard encore …

Activité 3

Pierre a fait de nouveaux carrés avec ses mosaïques (on ne sait pas comment).

c désigne toujours le nombre de mosaïques sur un côté des carrés.

Une formule permet de dire à l'avance combien il lui faut de carreaux de mosaïque pour un carré de côté *c*. La voici : $c\times 7-12$.

Des élèves ont fabriqué d'autres formules :

$c+c+(c-4)+c+c+(c-4)\times 2$	$c\times 4+(c-4)\times 4$	$(c-3)\times 4+(c-4)\times 3+12$

Peut-on valider ces formules ?

Commentaire

On peut différencier le travail en donnant la situation (dessin des carrés) à certains, pas à d'autres (pas forcément la même situation) et en demandant à ceux qui connaissent la situation de valider les formules de deux façons (pour que leur habileté en calcul littéral et leur confiance dans ce nouvel outil puisse continuer à s'accroître).