

De la résolution de problèmes à la construction d'automatismes

ou

Le calcul littéral, fil rouge d'une réflexion sur les compétences attendues
au collège, au lycée et au lycée professionnel
et leur construction au quotidien.

Document rédigé par

Françoise Munck, IA-IPR de mathématiques dans l'académie de Nantes

et

Stéphane Percot, professeur de mathématiques au collège Haxo de La Roche-sur-Yon

et IATICE de mathématiques de l'académie de Nantes.

Avec la collaboration de

Régine Coste IEN Maths Sciences dans l'académie de Nantes

Matthieu Avrillault, professeur au LP Audubon - Coueron

Xavier Beauvy professeur au LP Paul Emile Victor - Avrillé

Gérard Cordes professeur au lycée De Lattre - La Roche Sur yon

Yannick Danard professeur au collège Clément Jannequin - Avrillé

Emmanuel Malgras professeur au collège Pierre et Marie Curie - Le Pellerin

Annick Marguin professeur au collège Jean Rostand - Orvault

Grégory Maupu professeur au collège Milcendeau - Challans

Abdellah Mouda, professeur au LP Henri Dunant - Angers

Olivier Pinson professeur au lycée Auguste et Jean Renoir – Angers

Hélène Stainer professeur au collège Iles de Loire – St Sébastien sur Loire

Sommaire

<u>Introduction</u>	page 03
1) <u>Vers une construction progressive des compétences algébriques</u>	page 04
a) Démarrer par des problèmes ouverts, des tâches complexes	page 04
b) S'autoriser à travailler la technique	page 04
c) La contribution des outils numériques	page 07
2) <u>Décryptage des programmes du collège aux lycées</u>	page 09
a) Précisions sur les attendus en fin de la classe de 6 ^{ème}	page 09
b) Précisions sur les attendus en fin de la classe de 5 ^{ème}	page 10
c) Précisions sur les attendus en fin de la classe de 4 ^{ème}	page 11
d) Quelle maîtrise du calcul algébrique peut-on raisonnablement attendre d'un élève qui quitte le collège : - pour rentrer en 2 ^{nde} professionnelle - pour rentrer en 2 ^{nde} générale et technologique	page 12
e) Précisions sur les attendus en classe de 2 ^{nde}	page 14
<u>Conclusion</u>	page 15
Annexe	page 16

Introduction

Ce document a pour objectif de rendre compte d'une réflexion et d'une expérimentation conduites au cours de l'année scolaire 2011-2012, dans le cadre des travaux mutualisés par la DGESCO A3, et centrées sur les stratégies pédagogiques susceptibles de faciliter une acquisition progressive et durable d'une maîtrise du calcul algébrique. Cette réflexion, qui touche une problématique centrale de l'enseignement des mathématiques, n'a pu être qu'amorcée cette année et mérite d'être prolongée.

Nous tenons, en préliminaire, à rappeler un point qui nous semble essentiel : l'objectif prioritaire d'une formation mathématique en collège et en lycée est, et doit rester, de faire faire des mathématiques aux élèves. Or « **faire des mathématiques** » c'est « **résoudre des problèmes** ».

Nous souhaitons donc que les pratiques pédagogiques, qui peuvent être adoptées pour renforcer la maîtrise calculatoire des élèves, ne soient pas mises en œuvre au détriment des activités de recherche de problèmes.

En effet nous savons que les problèmes doivent être posés sous une forme la plus ouverte possible, de manière à laisser à nos élèves toute autonomie au niveau des ressources à utiliser et toute initiative au niveau de la stratégie à adopter, conditions nécessaires pour que les élèves construisent et/ou montrent les compétences attendues de la formation mathématique, que ce soit au collège ou au lycée.

Au collège, la résolution de problème, capacité clef du socle commun de connaissances et de compétences, doit pouvoir s'exercer dans une situation interne aux mathématiques mais aussi dans une situation qui ne ferait pas directement référence aux mathématiques. Nous parlons alors de « belle » tâche complexe.

Au lycée, tous les nouveaux programmes mettent l'accent sur la construction de la capacité à mobiliser les outils mathématiques dans des problèmes dont la contextualisation peut être empruntée aux disciplines qui donnent sa couleur à la voie de formation.

Pour autant, un élève ne peut pas résoudre de problème s'il ne maîtrise pas un minimum de technique. Sans ce minimum en effet toute réalisation technique d'une stratégie de résolution risque de se révéler particulièrement laborieuse, voire impossible à finaliser, ce qui est particulièrement démotivant.

Or force est de constater aussi que nos élèves savent de moins en moins calculer. Le calcul algébrique fait même aujourd'hui souvent obstacle à l'activité mathématique d'élèves qui ont pourtant du potentiel en mathématiques et qui sont amenés à faire des études nécessitant d'être un bon utilisateur des mathématiques.

Il est donc essentiel de munir tous nos élèves d'un minimum de technique calculatoire.

Mais quel est ce minimum ?

Quelles priorités se donner ?

Les élèves ont-ils tous les mêmes besoins ?

Quels sont les élèves qui ont le plus besoin d'une bonne habileté calculatoire ?

Quels leviers pour construire progressivement et de façon différenciée une nécessaire maîtrise technique ?

Autant de questions sur lesquelles notre réflexion s'est concentrée et sur lesquelles nous souhaiterions apporter quelques éléments de réponse pour faciliter le travail au quotidien avec les élèves.

1) Vers une construction progressive des compétences algébriques

a) Démarrer par des problèmes ouverts, des tâches complexes

L'objectif fixé au niveau national pour cette année scolaire consistait précisément à :

- *proposer des scénarios de formation des élèves les conduisant à mettre en œuvre de manière autonome une stratégie de résolution de problèmes ouverts (« tâches complexes ») en lien avec des capacités de calcul attendues.*
- *formaliser une réflexion à la fois sur la contribution des outils numériques (tableur, calcul formel) dans le cadre de l'étude d'un problème ouvert et sur les compétences développées dans le cadre d'une telle recherche ainsi que sur leur évaluation.*

Notre recherche nous a donc naturellement amenés à **questionner le rôle de la tâche complexe (ou du problème ouvert)** et celui des outils logiciels **dans la construction des capacités de calcul attendues.**

L'état actuel de notre réflexion nous conduit à dire que, selon nous, si les tâches complexes et les problèmes ouverts sont essentiels à la construction des compétences de résolution de problème, **ils ne permettent pas de construire à eux seuls l'habileté calculatoire visée.** Le problème ouvert s'impose pour donner du sens, ou donner à comprendre, l'intérêt d'une stratégie calculatoire nouvelle, ou d'une stratégie que l'on a déjà rencontrée mais que tous ne se sont pas encore appropriée.

Il faut donc trouver aussi le moyen de faire travailler à nos élèves la « technique » : **construire des automatismes nécessite de s'entraîner régulièrement et suffisamment.**

b) S'autoriser à travailler la technique

Quelques principes :

1. Nous avons pris l'habitude de **travailler les stratégies calculatoires par petites touches et de façon récurrente**, de manière à donner à chaque élève toutes les chances de se les approprier.
Par exemple en quatrième « développer et réduire une expression », en seconde « transformer une expression pour pouvoir donner son signe » font l'objet d'un entraînement régulier, systématique et conduit à doses homéopathiques (un ou deux calculs tous les jours pendant une période donnée).
2. Nous saisissons **toutes les occasions de faire de la technique au sein même de certaines situations.** Nous savons en effet d'expérience que c'est quand le calcul littéral se détache des situations pour devenir un outil autonome que le danger de la perte de sens pour les élèves se présente.
Par exemple les activités de dénombrement, telle que celle des « mosaïques » (voir annexe) permettent de commencer à développer la technique au sein même de la situation, en maintenant toujours un contrôle possible par retour à la situation. Ce type d'aller-retour est rassurant et porteur de sens pour les élèves les plus fragiles.

3. Nous nous abstenons aussi de donner *a priori* une règle car nous pensons qu'une **règle n'est pas le moyen de comprendre plus vite. C'est plutôt le moyen d'aller plus vite ... une fois que l'on a compris**. Nous voulons donc donner à chaque élève la possibilité d'accéder à la règle par lui-même quand il y est prêt.

Par exemple, nous confrontons régulièrement nos élèves de quatrième à des réductions d'expressions du type $A = 4x - (3x - 5)$ ou $B = 3x - (-4x + 7)$ le but étant que le raisonnement « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé » s'installe durablement.

4. Si certaines stratégies d'élève en acte peuvent se révéler opérantes, nous évitons soigneusement de les oraliser

Par exemple « moins par moins donne plus ». Nous savons que ce type de règle est incorrecte (confusion entre deux sens du symbole « moins » : opération et opposé) voire de nature à générer du trouble.

5. **Nous limitons le plus possible le nombre des règles calculatoires données.**

En collège, nous ne formalisons que la distributivité (simple) de la multiplication par rapport à l'addition. Tout le reste en découle. L'essentiel de notre travail consiste à montrer aux élèves comment.

6. Certains raisonnements peuvent aboutir à **des stratégies que nous formalisons, mais pas toujours dans le cas général.**

Par exemple en seconde nous attendons que nos élèves sachent donner, suivant les valeurs de la variable x , le signe de $ax + b$, pour des valeurs numériques données de a et b , en s'appuyant sur la connaissance du sens de variation de la fonction affine. Nous évitons de donner le tableau de signes de $ax + b$ dans le cas général car nous avons constaté que celui-ci induisait chez nos élèves essentiellement un effort de mémorisation, avec parfois perte de sens voire confusion (avec le second degré tout particulièrement) et *in fine* pour beaucoup d'entre eux perte d'efficacité. Remobiliser dans ce cadre les acquis sur le sens de variation de la fonction affine et un minimum de réflexion est à la fois plus simple et surtout plus efficace.

Toutefois notre réflexion nous a fait prendre conscience que, lorsqu'une stratégie calculatoire nous semble installée, nous nous comportons comme si la cause était entendue et la victoire gagnée. C'est sans doute à ce moment là que **quelques gammes s'imposent**.

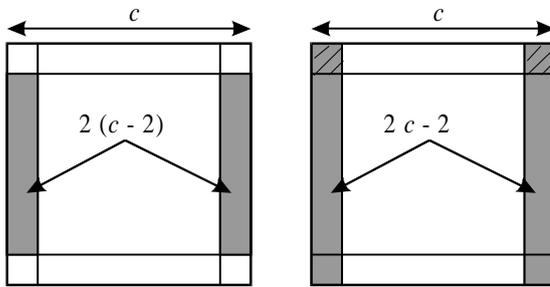
Une prudence toutefois : lorsque les élèves commencent les gammes, il est très important de **revenir régulièrement au sens, en particulier dans le traitement des erreurs**.

Plusieurs façons de revenir au sens :

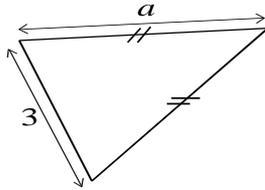
- utiliser des situations emblématiques dans la classe pour illustrer les expressions littérales qui posent problème

Par exemple : Un élève écrit : $2(a - 2) = 2a - 2$ (a pouvant prendre n'importe quelle valeur).

On peut lui demander d'illustrer $2(a - 2)$ et $2a - 2$ dans un contexte familier, les mosaïques (*activité citée en annexe*) par exemple, puis le laisser proposer une correction.



Un élève écrit : $a \times 2 + 3 = a \times 5$ (a pouvant prendre n'importe quelle valeur). On peut le faire écrire plusieurs expressions du périmètre du triangle ci-dessous.



- revenir aux propriétés des opérations (soustraire, c'est ajouter l'opposé ...)

Ce retour au sens est essentiel car les élèves doivent être capables d'auto-contrôler leurs calculs. Or ces moyens de contrôle ne sont véritablement opérants que si les élèves les ont élaborés par eux-mêmes au sein des situations.

Nous devons donc tout mettre à profit pour favoriser la construction de ces automatismes : courts temps de « gammes », activités rapides, entraînements réguliers et ciblés, y compris à la maison, en fonction des besoins, utilisation de didacticiels « intelligents » (en fonction de leur analyse d'erreur possible). L'objectif est non seulement d'atteindre la maîtrise technique mais aussi d'acquérir une certaine efficacité et rapidité dans l'exécution.

A ce titre nous souhaiterions mettre d'emblée en avant une idée qui nous semble un peu novatrice, du moins pour nous : dans le cadre de la construction d'une technique calculatoire, il est très fructueux, voire souhaitable, de **différencier les attendus** et/ou **les objectifs retenus**.

Par exemple, au niveau de la mise en équation d'un problème en fin de collège et au lycée professionnel :

- 1) L'objectif que nous nous fixons pour **tous** nos élèves est **la résolution de problème** avec ou sans équation. C'est ce qui permet à tous de renforcer une maîtrise des quatre premiers items de la compétence 3 du socle commun.
- 2) **Certains** de nos élèves vont aller plus loin et parvenir à donner sens à la mise en équation (**comprendre l'intérêt du passage à l'équation pour résoudre le problème**). Pour d'autres ce n'est pas encore le bon moment. Nous ne baissons pas les bras mais nous pensons qu'il n'est sans doute pas opportun d'insister dans l'instant. En revanche nous veillerons à « repasser le plat » et donc nous proposerons à un autre moment une autre situation visant le même objectif.
- 3) Pour autant, la stratégie de résolution d'une équation peut faire l'objet d'une plénière et on ne s'interdira pas de demander à tout élève de reproduire cette résolution hors contexte. L'expérience prouve que certains élèves « rentrent dans le sens grâce à la technique ». En outre, constater qu'on atteint ainsi une solution peut donner envie à certains élèves de se pencher avec plus d'enthousiasme sur le nouvel outil une prochaine fois.

- 4) Quelques élèves plus rapides vont avoir le temps de travailler un aspect de la résolution technique. Nous pouvons donc leur donner, et à eux seulement, des **questions défi** consistant à résoudre des équations, pourquoi pas de plus en plus compliquées, et hors contexte, rien que pour construire l'habileté calculatoire. Sont alors à prévoir pour ces élèves des procédures de vérification afin qu'ils ne valident pas, dans le cadre de ce travail en autonomie, des procédures erronées.

Autrement dit **les compétences calculatoires travaillées peuvent ne pas être les mêmes pour tous les élèves.**

Une précision toutefois : Si cette prise de conscience de l'importance de la dialectique à faire vivre entre résolution de problème et acquisition de techniques, et aussi de l'intérêt qu'il y a à envisager l'acquisition de techniques sous l'angle de la différenciation pédagogique, nous a fixé clairement de nouveaux caps, pour autant nous ne prétendons pas parvenir à cela facilement.

Nous nous y engageons toutefois résolument et nous efforçons d'avancer petit à petit, avec parfois des réussites mais aussi des échecs.

Quelques principes éclairent donc nos choix :

- 1 L'activité mathématique d'un élève fragile ne peut absolument pas se résumer à l'acquisition de technique calculatoire. Tout élève, y compris le plus fragile, doit prioritairement apprendre à résoudre des problèmes (ouverts).
- 2 Tout élève a besoin d'un minimum de technique mais il faut savoir doser les efforts.
- 3 Les élèves qui ont du potentiel peuvent avoir un entraînement technique supplémentaire. Ils auront besoin durablement d'une solide maîtrise calculatoire. (L'objet de notre réflexion ne porte que sur la maîtrise technique de l'habileté calculatoire, mais il va de soi que les élèves qui ont du potentiel doivent aussi être aussi stimulés par un entraînement supplémentaire sur la résolution de problème).

c) La contribution des outils numériques

- *Quel est le rôle des outils numériques dans la résolution de problèmes ouverts ?*

Les outils numériques (tableur, logiciel de géométrie dynamique, calcul formel, logiciel de programmation) libèrent l'activité des élèves en augmentant la palette des stratégies possibles pour étudier un problème et en trouver une solution, même si cette dernière n'est parfois qu'approchée. Certains problèmes peuvent être entièrement résolus par des outils numériques (ex : recherche sur tableur d'un problème comportant un nombre fini de possibilités). D'autres encore, ne peuvent être traités qu'algorithmiquement. Voir activité [« comptons les points ! »](#).

- *Les outils numériques peuvent-ils favoriser l'acquisition d'une compétence calculatoire algébrique ?*

Ce questionnement peut paraître paradoxal (provocateur ?), cependant l'utilisation de formules tableur constitue souvent un premier pas vers la construction de formules algébriques. Par ailleurs pouvoir tester sur beaucoup de nombres, deux programmes de calcul différents, pouvoir affiner le pas pour approcher celui ou ceux qui permettent d'obtenir, avec les deux programmes, le même

résultat est une stratégie pédagogique efficace pour faire comprendre aux élèves le sens nouveau que prend le symbole « égal » dans une équation.

Un bémol :

Quand les élèves ont testé sur beaucoup de nombres avec le tableur, ils n'ont plus guère envie de se pencher sur la preuve. On constate en lycée que certains élèves préfèrent continuer à tester plutôt que de résoudre de façon algébrique une équation.

- *Quel rôle peut jouer le calcul formel dans l'acquisition d'une maîtrise des techniques algébriques ?*

Il est important que le recours au calcul formel ne soit pas systématique (comme l'utilisation de la calculatrice dans le cadre de l'apprentissage du calcul numérique). Quand la situation étudiée n'exige qu'un niveau de maîtrise technique abordable, un calcul algébrique réalisé à la main est toujours un attendu.

Toutefois l'expérience conduite en lycée tendrait à prouver que seuls les élèves qui ont déjà construit une certaine maîtrise algébrique y ont recours spontanément.

Effectivement l'utilisation du calcul formel n'empêche pas la mobilisation chez l'élève de l'intelligence du calcul mais tout au contraire la favorise. Choisir la forme de l'expression algébrique adaptée à la question reste toujours de l'autonomie de l'élève. Cette mise à disposition d'un logiciel de calcul formel ne nous semble donc pas opposée à la volonté d'aller vers une meilleure maîtrise des techniques algébriques par les élèves.

Il est souhaitable que :

- ce recours soit possible pour résoudre des problèmes techniques complexes dont la résolution est acquise dans les cas simples.
- le nombre d'instructions à mobiliser par un élève soit restreint. L'attendu n'est pas que l'élève mémorise durablement un grand nombre de commandes (l'objet n'est pas la maîtrise du logiciel), mais qu'il en connaisse l'existence et qu'il puisse en exprimer le besoin. Le professeur pourra alors rappeler la succession de touches qui correspond à cette commande.

- *Quel est le rôle des exercices ?*

Certains exercices peuvent contribuer pleinement à travailler la technique.

De qualité irrégulière, certains outils, notamment ceux comportant une certaine analyse d'erreur, peuvent permettre un travail en autonomie par les élèves pour travailler les compétences calculatoires algébriques (développements, réductions, factorisations, résolutions d'équations, de systèmes d'équations....).

D'une manière générale, les outils numériques offrent dans de nombreux cadres une piste de différenciation pour mettre en œuvre les activités proposées aux élèves.

2) Décryptage des programmes du collège aux lycées

a) Précisions sur les attendus en classe de 6^{ème}

Le programme de la classe de sixième n'explique pas d'attendu particulier au niveau du passage à une formule ou des expressions littérales.

Toutefois il est important d'avoir présent à l'esprit que, plus tôt on familiarise les élèves à ce qui pourra prendre par la suite la forme d'une expression littérale, plus on leur donne de chance de s'appropriier le passage à l'algèbre.

Une précaution à prendre : il ne s'agit pas d'anticiper sur le programme suivant mais simplement de préparer le terrain, de semer des graines.

Pour cela il est essentiel de ne jamais imposer le recours à une lettre. Tout élève doit pouvoir vivre par lui-même le passage à la lettre comme facilitateur pour exprimer sa pensée, son raisonnement.

Par exemple dans les activités sur les suites de nombres [« premières marches »](#) et [« Empilons des cubes en 6^{ème} »](#)

Des mots pour le dire ... sans que le passage à la lettre ne soit jamais imposé

- *Premier essai : « Pour faire une nouvelle pyramide j'ai besoin, pour la nouvelle base, de 4 cubes de plus que pour la base de la pyramide précédente ».*

C'est long à dire !!! Comment faire plus court :

- *autres essais : « Base de la nouvelle pyramide = base de l'ancienne pyramide + 4 » ; « Nombre des cubes de la base de la nouvelle Pyramide = Nombre des cubes de la base de l'ancienne pyramide +4 » ou encore avec le tableur : « B3=B2+4 » « puis B4=B3 +4 » donc finalement « Nb cubes nvelle Pyr = nb cubes anc Pyr+4 » ou encore « Nn = Na + 4 »*

Pour préparer le passage au littéral il est important en classe de sixième de :

- **Renforcer le sens du symbole « = », écritures différentes d'un même nombre.**

Objectif : Aider à mieux percevoir par la suite de nouveaux sens (entre deux expressions littérales, puis plus tard dans une équation) .

- **Renforcer le sens des opérations et les liens entre addition et soustraction d'une part, entre multiplication et division d'autre part.**
- **Approcher les équations sans formalisme.**

Ex : recherche d'antécédents dans des programmes de calculs qu'on peut « remonter » ou par « tâtonnement intelligent » dans des programmes qu'on ne peut pas « remonter ».

b) Précisions sur les attendus en classe de 5^{ème}

Extraits du programme

Expression littérale

- Utiliser une expression littérale.
- Produire une expression littérale (*non exigible du socle commun*)
- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens.
- * Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens. (*non exigible du socle commun en 5^{ème} mais le sera en 4^{ème}*)

Initiation à la notion d'équation : (La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun.)

- * Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques. (*non exigible du socle commun en 5^{ème} mais le sera en 4^{ème}*)

En fin de cinquième on vise prioritairement la maîtrise d'un sens du symbole « égalité » à savoir le « égal » qui correspond implicitement à une quantification universelle (pour tout ...).

Exemple :

Soit deux formules $P = 3(L + 2)$ et $P = 3L + 6$

Quelle que soit la valeur par laquelle je remplace L dans l'une et l'autre formule, j'obtiens toujours avec les deux formules le même résultat.

Je peux donc écrire : $3(L + 2) = 3L + 6$

- On attend d'un élève de fin de cinquième qu'il ait compris ce qu'il fait quand il écrit $3(L + 2) = 3L + 6$ (il a présent dans sa tête la quantification)
- On attend donc aussi d'un élève au sortir de 5^{ème} qu'il sache **de façon autonome** dire pourquoi en revanche $3(L + 2) \neq 3L + 2$.

L'élève **doit prendre l'initiative de tester l'égalité**. Maîtrise implicite de la négation d'un « quel que soit ».

La maîtrise de ces **procédures d'auto-contrôle est essentielle**.

Les programmes de collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.

Le programme dit que la classe de cinquième correspond à une étape importante : **travail sur les égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner.**

En classe de cinquième on approche aussi un autre sens du symbole « = » : celui qui correspond à la question : peut-on trouver une valeur pour L de sorte que, lorsqu'on remplace L par cette valeur dans les deux formules, les deux formules donnent le même résultat ?

Ce sens du symbole « égalité », nouveau pour les élèves correspond implicitement à une quantification existentielle (existe-t-il ...?).

Remarque : Il est essentiel de veiller à installer en classe de 5e une bonne maîtrise du calcul sur les nombres relatifs, car cette maîtrise est nécessaire à la poursuite de l'apprentissage du calcul algébrique

c) Précisions sur les attendus en classe de 4^{ème}

Quelques élèves doivent avoir la possibilité de construire en 4^e l'attendu du programme de fin de cinquième. Le sens du symbole « égalité » : expressions égales

Extraits du programme

- Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens. (*Ce point n'était pas un exigible du socle commun en 5^{ème} mais il le devient en 4^{ème}*)
- Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.

Développement

Réduire des expressions du type $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$ (*non exigible du socle commun*)
Développer une expression de la forme $(a+b)(c+d)$

Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue. (*Non exigible du socle commun. Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.*)

L'apprentissage du calcul littéral est conduit très **progressivement** à partir de situations qui permettent aux élèves de **donner du sens à ce type de calcul** (voir activité « [à vos ardoises en 4^{ème}](#) » et « [les lapins de Fibonacci](#) »).

Le travail proposé s'articule autour de trois axes :

- utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques
- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; (*non exigible du socle commun*)
- utilisation du calcul littéral et donc élaboration de formules **pour prouver** un résultat général (*non exigible du socle commun*)

Les situations proposées **doivent exclure tout type de virtuosité** et **viser un objectif précis** : résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général.

Les stratégies de résolution sont à motiver dans des situations où les raisonnements de type arithmétique deviennent compliqués. Par exemple la résolution d'une équation du type $ax + b = cx + d$. La stratégie de résolution repose sur le seul fait que l'on garde une égalité vraie quand on ajoute les deux membres d'une égalité par un même nombre : on aboutit alors à une équation du type $ax = b$ dont la solution est par définition même du quotient a/b). Voir activité « [la calculatrice d'Alice](#) ».

En 4^{ème} on privilégie la mise en équation d'un problème.

L'expertise à installer durant cette année de 4^{ème} est le développement – réduction, (nécessaire en particulier pour prouver un résultat général) et la mise en équation d'un problème. Ce travail est à mener de front avec la consolidation de la maîtrise du calcul sur les nombres (nombres relatifs).

Remarque : En début de 4^{ème}, il est bon de consolider addition et soustraction sur les relatifs et pendant ce temps, de n'utiliser dans le calcul littéral que des coefficients positifs. On peut se passer assez longtemps des relatifs dans le littéral. Quand les relatifs sont bien en place, on peut aborder **progressivement** les points techniques suivants :

- L'opposé de a est noté $-a$. Le nombre $-a$ peut être positif autrement dit plus grand que 0
 - $-a = a \times (-1)$ (quand on ajoute a et $a \times (-1)$ on trouve 0)
 - $(-2) \times a = 2 \times (-a) = -(2 \times a)$ On peut écrire $-2 \times a$
 - $2 \times a - 5 \times a = -3 \times a$
 - $-(a - 2)$ est l'opposé de $a - 2$. $-(a - 2) = -a + 2$ (quand on ajoute $a - 2$ et $-a + 2$, on trouve 0)
 - $4 - 2 \times (a + 3) = 4 + (-2) \times (a + 3) = 4 - 2 \times a - 6$
- Progressivité à construire aussi dans le développement avec des termes de degré 2,
- $(2 + a) \times (3 + a) = (2 + a) \times 3 + (2 + a) \times a$
 - $(a - 2) \times (a - 3) = (a + (-2)) \times (a + (-3)) = \dots$

d) Précisions sur les attendus en classe de 3^{ème}

Extraits du programme

Écritures littérales

Puissances

Factorisation (factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent)

Identités remarquables (les utiliser dans les deux sens)

Équations et inéquations du premier degré

Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues

Problème se ramenant au premier degré : équations produits

Ces attendus sont non exigibles du socle commun. Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

Quelle maîtrise du calcul algébrique peut-on raisonnablement attendre d'un élève qui quitte le collège :

- pour entrer en 2^{nde} professionnelle
- pour entrer en 2^{nde} générale et technologique

De la 3^{ème} vers le lycée professionnel

Un élève qui va poursuivre ses études en LP (2^{nde} Pro) doit savoir

- Développer, réduire et ordonner une expression algébrique en utilisant le développement de $(a+b)(c+d)$.
- Factoriser une expression algébrique en observant un facteur commun.
- Résoudre une équation $ax+b = c$ en maîtrisant le sens des opérations ou en remontant le programme de calcul.

L'essentiel est que ces élèves ne restent pas inhibés devant un problème et que face à une équation ils sachent s'organiser pour en trouver une solution approchée (tâtonnements, lecture graphique, utilisation de logiciels ...)

Un élève qui va poursuivre ses études en LGT (2^{nde} GT) a besoin d'avoir automatisé le fait de

- Développer, réduire et ordonner une expression algébrique soit en utilisant le développement de $(a+b)(c+d)$, soit une identité remarquable.
- Factoriser une expression algébrique en observant un facteur commun ou en utilisant une identité remarquable.
- Résoudre algébriquement une équation du premier degré du type $ax+b=cx+d$. Les tâtonnements ne suffisent plus. (attention à distinguer : vérifier qu'un nombre est solution et résoudre une équation ie chercher toutes les solutions et donc nécessairement résoudre algébriquement)
- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Une expertise au niveau de ces attendus du calcul algébrique est à installer dès la classe de troisième pour ces élèves. Ces résolutions algébriques ne doivent plus poser question, même si dans la classe certains élèves continuent à résoudre les problèmes de manière personnelle.

Une très bonne maîtrise du calcul sur les fractions est aussi un pré requis. Cela est essentiel pour aborder le travail sur les « fractions rationnelles » au lycée.

e) Décryptage des programmes du lycée général et technologique :

Précisions sur les attendus en classe de 2nde avec des activités possibles.

Extraits du programme

Expressions algébriques

Associer à un problème une expression algébrique

Identifier la forme la plus adéquate (factorisée, développée) d'une expression pour résoudre le problème

Développer, factoriser des expressions polynomiales simples

Transformer des **expressions rationnelles** simples

Equations

Résolution graphique et algébrique d'équations

Inéquations

Résolution graphique et algébrique d'inéquations

Résolution d'inéquation à partir du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du

premier degré. Par exemple déterminer le signe de $1 - \frac{1}{x^2}$.

Un élève qui va poursuivre des études en première S ou STI2D-STL, ou qui aura besoin dans ses études de faire des mathématiques doit **avoir automatisé** le fait de

- Développer, réduire et factoriser une expression **polynomiale** simple (même si le facteur commun n'est pas tout à fait apparent)
- Mettre au même dénominateur **deux fractions rationnelles** simples.
- **Choisir la forme de l'expression la mieux adaptée au problème** (par exemple savoir comment transformer une expression pour étudier son signe.)

Une expertise au niveau de ces attendus du calcul algébrique est à installer chez ces élèves en classe de seconde.

Un objectif prioritaire est que ces élèves soient capables de,

- **transformer une expression pour pouvoir trouver les valeurs qui l'annulent et/ou en étudier le signe.**
- **choisir parmi plusieurs expressions celle qui est la plus adaptée au problème à résoudre**
- **dans une formule, empruntée à d'autres disciplines, qui lie plusieurs quantités, exprimer l'une de ces quantités (même si elle ne s'appelle pas x) en fonction des autres**

En classe de première dériver et étudier le signe d'une dérivée ne doit pas poser de difficulté particulière.

Exemple. Etudier le signe de la dérivée de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ ne doit pas faire obstacle

Conclusion

Ce document s'est donné pour objectif de formaliser quelques pistes pédagogiques de nature à renforcer la construction chez les élèves des compétences calculatoires attendues au niveau de l'algèbre. Nous avons voulu préciser le rôle des problèmes ouverts dans cette construction et analyser ce que les TICE pouvaient apporter à cet apprentissage.

Nous tenons toutefois dans cette conclusion à rappeler que cette étude n'a le recul que d'une seule année et qu'elle mérite donc d'être encore approfondie.

Nous avons acquis plusieurs convictions :

- Construire des compétences calculatoires n'est pas une fin en soi. Viser cet objectif ne doit en aucun cas occulter l'objectif prioritaire qu'il faut garder pour tous les élèves, y compris le plus fragile : lui faire résoudre des problèmes car **faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes.**

Sont donc à trouver :

- des situations permettant à tout élève de résoudre des problèmes, avec ou sans le recours à l'algèbre,
 - des problèmes qui, s'ils imposent de mobiliser l'algèbre, ne nécessitent pour autant pas une maîtrise technique importante.
- Construire des compétences calculatoires ne doit pas être déconnecté des situations qui lui donnent sens.
 - Nos élèves qui parviennent à penser algébriquement la résolution d'un problème, et qui vont avoir besoin des mathématiques pour réussir leur parcours de formation, doivent avoir la possibilité d'acquérir les automatismes en calcul sans la maîtrise desquels ils rencontreront des difficultés dans la poursuite de leurs études. L'entraînement technique de ces élèves peut être (doit être ?) plus poussé.

En outre, pour la liaison collège - lycée un regard particulier doit être porté sur les élèves de 3^{ème}. Nous gardons présent à l'esprit que, dans le cadre du socle commun de connaissances et de compétences, l'exigence pour tous nos élèves quittant le collège est bien de les rendre capables de résoudre un problème, si besoin est avec des procédures personnelles. Mais il convient pour les élèves qui, en fin de 3^{ème} expriment le souhait de poursuivre leurs études en 2^{nde} générale et technologique, de faire atteindre une certaine maîtrise des compétences algébriques décrites dans les programmes de 3^{ème}, et cela tout particulièrement si leur projet d'étude les destine à des filières dans lesquelles les mathématiques ont une place importante.

Nous avons, grâce à cette réflexion, acquis la conviction que la construction des compétences calculatoires doit être pensée dans une logique de différenciation pédagogique.

Il s'agit bien pour nous d'un nouveau cap à suivre, cap qui guide nos choix, mais vers lequel nous ne cheminons que pas à pas.

Une situation pour permettre aux élèves de travailler sur des expressions littérales dès la 5e

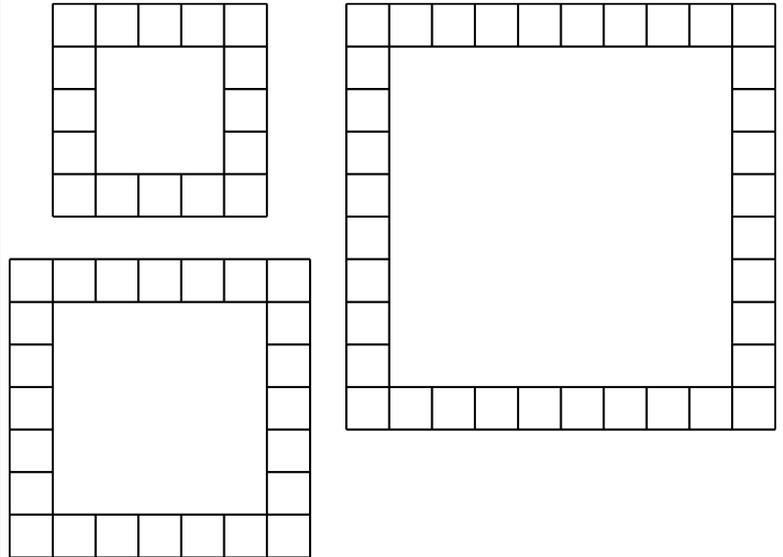
Activité 1

Pierre joue avec des carreaux de mosaïques. Il dispose ses mosaïques pour obtenir des « carrés ».

En voici trois ci-contre.

Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de mosaïques il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.

Pouvez-vous l'aider ?

**Commentaire**

Pour aider Pierre, les élèves expliquent, d'abord en français, comment il peut s'y prendre pour savoir combien il faut de mosaïques pour fabriquer n'importe quel grand carré.

Un exemple de phrase écrite par les élèves : *Pour trouver le nombre de mosaïques pour fabriquer n'importe quel carré, on multiplie le nombre de mosaïques sur un côté du carré par 4 et on retire 4 (pour éviter que les mosaïques des coins soient comptés deux fois).*

On peut alors insister sur les difficultés rencontrées par les élèves pour rédiger leurs explications en français. Il est possible d'indiquer que les mathématiciens ont inventé un moyen plus pratique pour rendre compte d'un tel travail : ils fabriquent des formules et invitent les élèves à essayer.

Les élèves élaborent alors progressivement des formules très diverses, en rapport avec leur stratégies de comptage.

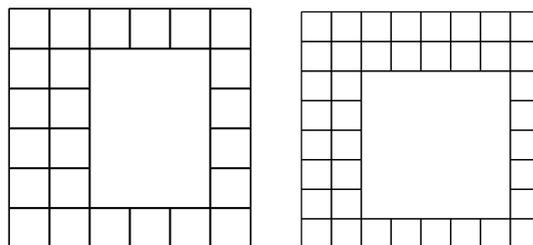
ex : $c + (c-2) + c + (c-2)$; $(c-1) \times 4$; $a \times 4 - 4$; $b + (b-1) + (b-1) + (b-2)$; $côté \times 4 - 4$ etc

On peut proposer d'autres stratégies de comptage que celles trouvées par les élèves et demander aux élèves d'élaborer les formules qui correspondent.

Les formules sont critiquées, améliorées, testées, comparées, mises en lien, utilisées ...

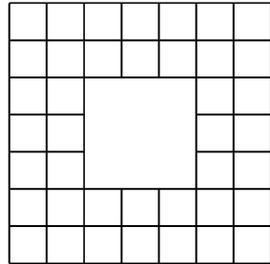
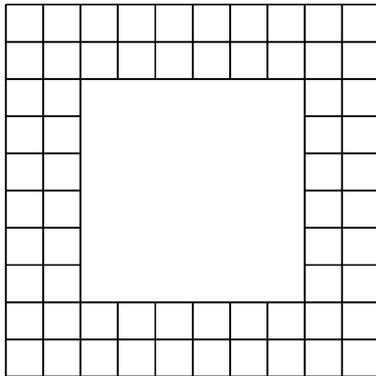
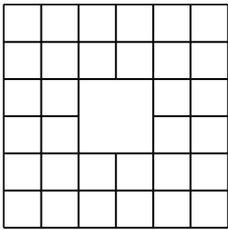
Plus tard on peut reprendre un travail analogue avec d'autres familles de carrés (ci-contre).

C'est l'occasion pour les élèves plus lents de revisiter ce qui leur a posé problème la première fois.



Une autre activité peut être donnée **quelques semaines plus tard**.

Pierre décide de border ses carrés de deux rangs de mosaïques.



Pour l'aider, les élèves d'une autre classe ont écrit des formules qui donnent le nombre de mosaïques nécessaires en fonction du nombre de mosaïques sur un côté du carré à fabriquer.

Voici leurs formules :

$c \times 8 - 16$	$(c \times 4 - 4) + (c \times 4 - 12)$
$c \times 4 + (c - 2) \times 4 - 8$	$(c - 4) \times 8 + 16$
$c \times 4 + (c - 4) \times 4$	$(c - 2) \times 2 \times 4$
$c + c + (c - 4) \times 2 + c + c + (c - 4) \times 2$	

Peut-on valider ces formules ?

Commentaire

Les débats permettent de réaffirmer (déjà mis en évidence lors des activités précédentes) :

- qu'un test ne suffit pas pour valider une formule ;
- qu'un test suffit pour rejeter une formule ;
- qu'on a deux méthodes pour prouver qu'une formule est correcte (en trouvant la façon de compter associée et en montrant qu'on a bien compté toutes les mosaïques ou en faisant du « calcul littéral »).

Quelques semaines plus tard encore ...

Activité 3

Pierre a fait de nouveaux carrés avec ses mosaïques (on ne sait pas comment).

c désigne toujours le nombre de mosaïques sur un côté des carrés.

Une formule permet de dire à l'avance combien il lui faut de carreaux de mosaïque pour un carré de côté c . La voici : $c \times 7 - 12$.

Des élèves ont fabriqué d'autres formules :

$c + c + (c - 4) + c + c + (c - 4) \times 2$	$c \times 4 + (c - 4) \times 4$	$(c - 3) \times 4 + (c - 4) \times 3 + 12$
----------------------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------------

Peut-on valider ces formules ?

Commentaire

On peut différencier le travail en donnant la situation (dessin des carrés) à certains, pas à d'autres (pas forcément la même situation) et en demandant à ceux qui connaissent la situation de valider les formules de deux façons (pour que leur habileté en calcul littéral et leur confiance dans ce nouvel outil puisse continuer à s'accroître).