Éléments de correction Sujet non S 2009

Exercice 1 :

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

```
      2
    7   1
  6       9
5   3   4   8
```

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\dfrac{6+45}{3} \leq S \leq \dfrac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

```
      1
    8   4
  6       9
2   5   7   3
```

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

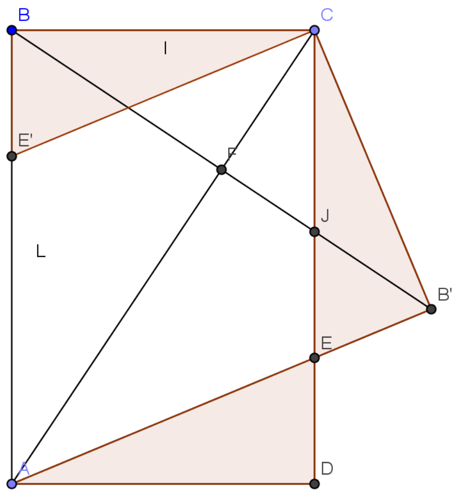
b. Triangle 19-magique

```
      7
    4   1
  5       9
3   8   6   2
```

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

Exercice 2 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c = 10$

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$
avec $L \geq 8$
soit : $l^2 = L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l = 0{,}25Ll$ d'où $c = 0{,}75L$ d'où $L^2 = 2l^2$ d'où $l = \dfrac{\sqrt{2}}{2}L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Remarque : Sauf dans le cas où la figure de départ est un carré (identique à la figure d'arrivée, donc un losange), la figure CB'E est bien un triangle extérieur au rectangle ABCD, c'est-à-dire la partie enlevée.
(Il suffirait de dire que FJ < FB' car le triangle AJC a une aire inférieure au triangle ABC, triangles de même base et donc de hauteurs sont classées dans l'ordre souhaité)

Exercice 3 :

1	**3**	**9**	**Total**
21	0	0	**21**
18	1	0	**21**
15	2	0	**21**
12	3	0	**21**
12	0	1	**21**
9	4	0	**21**
9	1	1	**21**
6	5	0	**21**
6	2	1	**21**
3	6	0	**21**
3	3	1	**21**
3	0	2	**21**
0	7	0	**21**
0	4	1	**21**
0	1	2	**21**

Il y a donc 15 façons différentes d'effectuer un paiement de 21 €.

2. On remarque que $81 = 3 \times 27$, $27 = 9 \times 3$, $9 = 3 \times 3$ et $3 = 3 \times 1$. Autrement dit, il faut trois pièces de 1 € pour remplacer une pièce de 3 €, 3 pièces de 3 € pour remplacer une pièce de 9 €…
Pour effectuer un paiement de n € avec le moins de pièces possibles, il s'agit donc de déterminer d'abord le nombre maximal de pièces de 81 € que l'on peut utiliser (c'est-à-dire de trouver le quotient de la division euclidienne de n par 81) puis de déterminer le nombre maximal de pièces de 27 € à utiliser, et ainsi de suite. On obtiendra donc le nombre minimal de pièces à utiliser en effectuant une suite de divisions euclidiennes.
$183 = 2 \times 81 + 21$. On utilisera donc 2 pièces de 81 € et il reste 21 € à payer.
$21 = 9 \times 2 + 3$. On utilisera donc en plus 2 pièces de 9 € et le reste de 3 € sera payé avec une seule pièce de 3 €.

Pour effectuer un paiement de 183 euros avec le moins de pièces possibles, on doit donner 2 pièces de 81 €, 2 pièces de 9 € et 1 pièce de 3 €.

3. Cela découle du raisonnement mis en place à la question 2.
Soit n la somme en € à payer.
En effectuant la division euclidienne de n par 81, le quotient q_1 est le nombre de pièces de 81 € à fournir et l'on a : $n = 81q_1 + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < 81$. Si $r_1 = 0$, c'est terminé.
Sinon, en effectuant la division euclidienne de r_1 par 27, le quotient q_2 est le nombre de pièces de 27 € à fournir et l'on a : $r_1 = 27q_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_2 < 27$. Or $r_1 < 81$ donc $q_2 < 3$ soit donc $q_2 \in \{0 ; 1 ; 2\}$. Si $r_2 = 0$, c'est terminé.
Sinon, en effectuant la division euclidienne de r_2 par 9, le quotient q_3 est le nombre de pièces de 9 € à fournir et l'on a : $r_2 = 9q_3 + r_3$ avec $0 \leqslant r_3 < 9$. Or $r_2 < 27$ donc $q_3 < 3$ soit donc $q_3 \in \{0 ; 1 ; 2\}$. Si $r_3 = 0$, c'est terminé.
Sinon, en effectuant la division euclidienne de r_3 par 3, le quotient q_4 est le nombre de pièces de 3 € à fournir et l'on a : $r_3 = 3q_4 + r_4$ avec $0 \leqslant r_4 < 3$. Or $r_3 < 9$ donc $q_4 < 3$ soit donc $q_4 \in \{0 ; 1 ; 2\}$. Si $r_4 = 0$, c'est terminé. Sinon, r_4 est égal à 1 ou 2 et on l'atteint en donnant une ou deux pièces de 1 €.

Tout paiement peut donc être effectué dans les conditions imposées par l'énoncé.

4. a) Pour chaque pièce, il y a deux possibilités : l'utiliser pour le paiement ou pas.
Il y a donc 2^5 possibilités. A celles-ci il faut enlever le cas où on n'utilise aucune pièce.

Il reste donc 31 prix différents « payables » avec ces cinq pièces.

b) L'acheteur fournit 3 + 9 = 12 euros, le vendeur lui rend 1 euro. **La transaction est effectuée.**

c) L'acheteur peut fournir au maximum 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 euros : c'est le montant maximal d'une transaction entre particuliers.
Soit n un prix inférieur à 121 euros.
Si ce prix fait partie des 31 trouvés au 4. a), l'affaire est réglée : il s'agira d'un paiement.
Sinon, on peut remarquer que tout nombre strictement inférieur à 121 peut être réalisé en utilisant au plus deux pièces de chaque sorte (voir la question 3).
Une transaction entre deux particuliers peut alors s'effectuer ainsi :
On détermine une façon de payer utilisant au plus deux pièces chaque valeur.
On s'intéresse ensuite aux pièces dans l'ordre croissant des valeurs :
S'il faut strictement moins de 2 pièces de 1 €, on passe aux pièces de 3 € sinon on augmente d'une unité le nombre de pièces de 3 € à fournir par l'acheteur et le vendeur « rend » une pièce de 1 €.
On examine alors le nombre de pièces de 3 € à fournir de la même façon que précédemment puis on poursuit le processus jusqu'aux pièces de 81 €.

<u>Exemple</u>: $95 = 81 + 9 + 3 + 2 \times 1$. Il faut a priori deux pièces de 1 €.
mais $95 = 81 + 9 + 3 \times 2 - 1$. Il faut désormais que l'acheteur donne 2 pièces de 3 € (qu'il n'a pas) et le vendeur lui rend 1 €.
puis $95 = 81 + 2 \times 9 - 3 - 1$. Il faut désormais que l'acheteur donne 2 pièces de 9 € (qu'il n'a pas) et le vendeur lui rend 4 € (une pièce de 3 € et une pièce de 1 €).
puis $95 = 81 + 27 - 9 - 3 - 1$
L'acheteur fournit donc 81 + 27 euros, le vendeur lui rend 9 + 3 + 1 euros.

<u>Exercice 4 :</u>

Tableau de données créé à partir du site des diagonalistes

Diagonales	Distances à vol d'oiseau	Distances de référence	Intervalles	Temps maximum autorisé (en heures)
Dunkerque-Menton	880	**1 190**	1 090 à 1 472	**100**
Hendaye-Menton	750	**940**	904 à 985	**78**
Hendaye-Strasbourg	930	**1 170**	1 106 à 1 252	**99**
Brest-Strasbourg	900	**1 080**	1 023 à 1 146	**88**
Brest-Menton	1 050	**1 400**	1 335 à 1 480	**116**
Brest-Perpignan	1 060	**1 065**	1 032 à 1 214	**89**
Dunkerque-Hendaye	900	**1 050**	1 015 à 1 163	**88**
Dunkerque-Perpignan	900	**1 190**	1 131 à 1 271	**100**
Strasbourg-Perpignan	750	**940**	915 à 1 033	**78**

1°) On choisit une ville de départ, par exemple Dunkerque D. La symétrie de la figure montre qu'il n'y a ensuite que deux choix possibles : Perpignan ou Menton.

Des trajets possibles en tenant compte des symétries sont :

D – P – B – S – P , soit 4 diagonales

D – P – B – S – H – D – M – H , soit 7 diagonales

D – P – B – M – H – D – M , soit 6 diagonales

D – P – B – M – D – H – S – B , soit 7 diagonales

D – M – H – D – P – B – S – P , soit 7 diagonales

D – M – H – S – B – P – D – H , soit 7 diagonales

D – M – B – S – H – D – P – B , soit 7diagonales

D – M – B – P – D – H – S – P , soit 7 diagonales.

On ne peut jamais parcourir les 9 diagonales. (En terminale, spécialité, vous verrez le théorème d'Euler)

2°) Dunkerque n'est pas relié directement à Strasbourg. Trajets possibles :

D – P – S	D – M – B – S	D – M – B – P – S	D – P – B – M – H – S	D – M – H – D – P – B – S
2 360	3 670	4 595	5 765	6 515

3°) Il n'y a que deux trajets possibles : D – M – B – S – P – D et D – M – H – S – P – D de longueurs respectives 5 800 km et 5 430 km ; le deuxième est le plus court.

4°) Les villes D, M et H nécessitent 3 couleurs ; P ne peut pas être de la même couleur que D, mais peut avoir la couleur de M. Coloriage possible : D et S en rouge, M et P en bleu, H et B en jaune.