Éléments de correction Sujet S 2009

Exercice 1 :

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)

2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

```
      2
    7   1
  6       9
5   3   4   8
```

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

```
      1
    8   4
  6       9
2   5   7   3
```

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

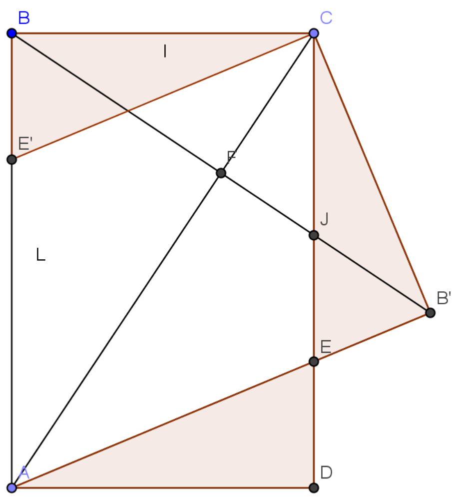
b. Triangle 19-magique

```
      7
    4   1
  5       9
3   8   6   2
```

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

Exercice 2 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit c = 10

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$ avec $L\geq 8$
soit : $l^2=L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l=0{,}25Ll$ d'où $c=0{,}75L$ d'où $L^2=2l^2$ d'où $l=\dfrac{\sqrt{2}}{2}L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Remarque : Sauf dans le cas où la figure de départ est un carré (identique à la figure d'arrivée, donc un losange), la figure CB'E est bien un triangle extérieur au rectangle ABCD, c'est-à-dire la partie enlevée.
(Il suffirait de dire que FJ < FB' car le triangle AJC a une aire inférieure au triangle ABC, triangles de même base et donc de hauteurs sont classées dans l'ordre souhaité)

Exercice 3 :

1. L'heure est notée : H h M min

$\widehat{AXB}$ est proportionnel à l'heure décimale et $\widehat{AXB}=30(\mathrm{H}+\dfrac{M}{60})$

$\widehat{AXC}=6\mathrm{M}$

à 3 h 30 min : $\widehat{AXB}=105°$ et $\widehat{AXC}=180°$ et à 3h 35 min : $\widehat{AXB}=107{,}5°$ et $\widehat{AXC}=210°$

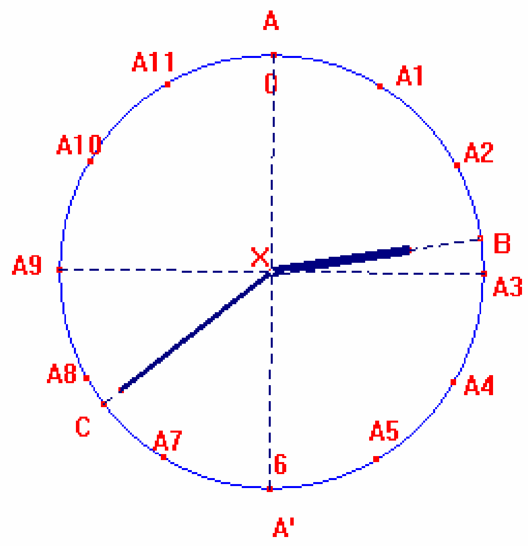
2. $\widehat{AXC} - \widehat{AXB} = 108°$ à 3h 36 min

$\widehat{AXB} - \widehat{AXC} = 108°$ alors M < 0 : impossible

3. $\widehat{AXB} = \widehat{AXC}$ alors M = $\frac{60}{11}$ H avec H = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 .... , 9 et 10

(pour H = 11, M = 60 soit 12H : début d'un nouveau cycle...)

4.



Heure pour lesquelles B = C	Secteur angulaire d'appartenance de l'aiguille des heures	Secteur angulaire d'appartenance de l'aiguille des secondes	Superposition des trois aiguilles possible
0h00	Point A	Point A	oui
1h05min27s	A1XA2	A5XA6	non
2h10min54s	A2XA3	A10XA11	non
3h16min21s	A3XA4	A4XA5	non
4h21min49s	A4XA5	A9XA10	non
5h27min16s	A5XA6	A3XA4	non
6h32min44s	A6XA7	A8XA9	non
7h38min11s	A7XA8	A2XA3	non
8h43min38s	A8XA9	A7XA8	non
9h49min05s (troncature)	A9XA10	A1XA2	non
10h54min32s	A10XA11	A6XA7	non

5. Si cela est possible, la première fourmi aura parcouru un nombre entier *m* de tours et la deuxième un nombre entier *n* d'allers et retours. La vitesse étant constante, la distance parcourue est la même et :

$m\,\pi\,d = 2\,n\,d$ où d est le diamètre de l'horloge.

$\pi = \frac{2n}{m}$: π serait alors un rationnel, ce qui n'est pas le cas !

Exercice 4 :

1. Les faces du tétraèdre étant isométriques et la somme des angles d'un triangle étant égale à un angle plat, les points D_2 ,A et D_3 sont alignés…

2. Deux faces opposées d'un pavé droit sont des rectangles isométriques et ont donc des diagonales égales.

3.a/. La propriété de Pythagore donne AF = $\sqrt{30}$. AH = $\sqrt{19}$.

b/. Volume du tétraèdre ABCD =Volume du Pavé − 4×Volume du tétraèdre AEDC = $2\sqrt{95}$

5.a/ $\hat{B}$- $\hat{A} \leq \hat{C} \leq \hat{B} + \hat{A}$. D'où : $2\hat{C} \leq \pi$.

b/Au 4. Un angle était obtus car $\cos(\hat{C}) = \frac{5^2+6^2-8^2}{2*5*6} < 0$. (Al Kashi).