Sujet non S – Eléments de correction

Exercice 1

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.

2. *a*. Première méthode :
Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30°$. Donc $\widehat{BCD} = 60°$.
Et puisque BC = DC, le triangle BCD est donc équilatéral.
Ensuite, $\widehat{BDA} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où BD = BA.
Finalement, on trouve bien AB = BC.

Deuxième méthode :
On note R le rayon du grand cercle.
On applique une formule de trigonométrie : $\sin \widehat{DAC} = \frac{DC}{AC}$, d'où $\sin 30° = \frac{R}{AC}$.
Puisque $\sin 30° = \frac{1}{2}$ on obtient AC = 2R. Or BC = R d'où AB = R. Finalement, AB = BC.

b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle. En appliquant le résultat précédent, il vient que AE = 2r. De plus, EB = r. On obtient donc AB = 3r, c'est-à-dire $R = 3r$.

3. On doit avoir AD = $3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$ d'où $R = 3$ puis $r = 1$.

4. Si $r = \frac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.
D'autre part, on a : $R = 3r = \frac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.
La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{BCD}$.
Cette surface vaut donc $\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \frac{11\pi}{24}$.
Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \frac{11\pi}{2}$.

Exercice 2

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x - 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :
a. Si $b = a$, le prolongement est « a b 0 ».
b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « a b $(11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a : $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.
d. Si $a < b$, « a b $(b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.
Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

5. **1[er] cas : si $\boldsymbol{a = b}$**

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.

Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.

Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a a ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2[e] cas : $\boldsymbol{a = b + 1}$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3[e] cas : $\boldsymbol{a = 0}$ et $\boldsymbol{b = 1}$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4[e] cas : $\boldsymbol{0 < a < b}$,

« a b $(b - a)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(11 + a - b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5[e] cas : Si $\boldsymbol{b = 0}$ et $\boldsymbol{a > 1}$

le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6[e] cas : Si $\boldsymbol{a > b + 1 > 1}$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

<u>Exercice 3</u>

1. N(2, 3) = 4 N(2, 4) = 4 N(3, 4) = 6 N(3,5) = 7 N(3, 6) = 6 N(5, 7) = 11 N(8, 12) = 16

2. *a)* $N(1, b) = b$

b) $N(2, b) = \begin{cases} b + 1 & \text{si } b \text{ impair} \\ b & \text{si } b \text{ pair} \end{cases}$

c) $N(k, kb) = k\,N(1, b)$

3. *a)* a et b sont premiers entre eux donc la diagonale ne rencontre aucun nœud du quadrillage. A chaque fois qu'elle coupe un côté (vertical ou horizontal), elle traverse ensuite un nouveau carré, jusqu'au dernier. Elle coupe $b - 1$ côtés verticaux et $a - 1$ côtés horizontaux donc elle traverse $a + b - 2$ carrés après avoir coupé un premier côté. Il faut alors ajouter le premier côté traversé donc $N(a, b) = a + b - 1$.

b) Pour a et b premiers entre eux, $N(ka, kb) = k\,N(a, b) = k\,(a + b - 1)$

4. N(1500, 2010) = 30 N(50, 67) = 30 (50 + 67 – 1) = 3480

5. Première méthode

On a : $a = ka'$ et $b = kb'$ avec k = pgcd(a, b) et a' et b' premiers entre eux.
N(a, b) = N(ka', kb') = k N(a', b') = k ($a' + b' - 1$) = $ka' + kb' - k$ = ***a* + *b* – pgcd(*a*, *b*)**

Seconde méthode

Au résultat trouvé en 3.*a)* il faut retirer les noeuds du quadrillage qui sont au nombre de pgcd(a, b) – 1.
Ainsi N(a, b) = $a + b - 1$ – (pgcd(a, b) – 1) = $a + b$ – pgcd(a, b).

Exercice 4

1. *a)* Le score étant de 14 à 12, il y a eu au minimum 26 lancers gagnants. **Jean a tort**.
   b) Puisqu'il y a eu 28 lancers et 26 lancers non nuls, il y a eu **2 lancers nuls**.
   c) Etienne a marqué les deux derniers points consécutifs.

	Jean	Etienne
$28^{\text{ème}}$ lancer	12	14
$27^{\text{ème}}$ lancer	12	13
$26^{\text{ème}}$ lancer	12 12	13 12

Dans tous les cas, **le score de Jean est de 12 au $26^{\text{ème}}$ lancer**.

2. Etienne a gagné 6 fois avec un écart maximal par lancer égal à 5. Jean a gagné 10 fois avec un écart minimal par lancer égal à 1. L'écart maximal en faveur d'Etienne est donc $6 \times 5 - 10 \times 1 = 20$. **L'écart en faveur d'Etienne entre les deux sommes ne peut donc être de 22**.

3. Etienne gagne avec au minimum un score de 12 à 10. Il y a donc au moins 22 lancers gagnants. Le nombre de lancers est un multiple de 5 compris entre 22 et 35 exclu, soit 25 ou 30. Pour 25 lancers, il y a 5 lancers nuls donc 20 gagnants, ce qui est absurde. Pour 30 lancers, il y a alors 6 lancers nuls et 24 lancers gagnants**. Le score est donc 13-11 en faveur d'Etienne**.

4. Le score est 13-11 (c'est le seul couple de nombre premiers consécutifs supérieurs à 10 et dont la somme est inférieure à 30. Le nombre de lancers est un nombre premier, entre 24 et 30, c'est donc 29. Le nombre de lancers nuls est 29 – 24 = 5 qui est un nombre premier. **Le nombre de lancers nuls est 5**.

5. Le nombre de parties gagnantes est 16. Soit n le nombre de lancers nuls et $\overline{N}$ la moyenne de ces lancers nuls.
La somme des points réalisés par Jean est $(16 + n) \times 4{,}1$
La somme des points réalisés par Jean sans les lancers nuls est $16 \times 4{,}25 = 68$
La somme des points réalisés lors des parties nulles est $(16 + n) \times 4{,}1 - 68$.

De même pour Etienne, la somme des points réalisés lors des parties nulles est $(16 + n) \times 3{,}9 - 16 \times 4$.
n est alors solution de l'équation $(16 + n) \times 4{,}1 - 68 = (16 + n) \times 3{,}9 - 64$. On en déduit $n = 4$ puis $\overline{N} = \dfrac{20 \times 4{,}1 - 68}{4} = 3{,}5$.

On peut aussi résoudre le système $\begin{cases} 4{,}25 \times 16 + n \times \overline{N} = (16 + n) \times 4{,}1 \\ 4 \times 16 + n \times \overline{N} = (16 + n) \times 3{,}9 \end{cases}$ et on obtient de même à $n = 4$ et $\overline{N} = 3{,}5$.