Sujet S – Eléments de correction

Exercice 1

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.

2. *a*. Première méthode :
Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD}$ = 30°. Donc $\widehat{BCD}$ = 60°.
Et puisque BC = DC, le triangle BCD est donc équilatéral.
Ensuite, $\widehat{BDA}$ = 30°, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où BD = BA.
Finalement, on trouve bien AB = BC.

Deuxième méthode :
On note R le rayon du grand cercle.
On applique une formule de trigonométrie : $\sin \widehat{DAC} = \frac{DC}{AC}$, d'où $\sin 30° = \frac{R}{AC}$.
Puisque $\sin 30° = \frac{1}{2}$ on obtient AC = 2R. Or BC = R d'où AB = R. Finalement, AB = BC.

b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle. En appliquant le résultat précédent, il vient que AE = 2r. De plus, EB = r. On obtient donc AB = 3r, c'est-à-dire $R = 3r$.

3. On doit avoir AD = $3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$ d'où $R = 3$ puis $r = 1$.

4. Si $r = \frac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

D'autre part, on a : $R = 3r = \frac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{BCD}$.

Cette surface vaut donc $\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \frac{11\pi}{24}$.

Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \frac{11\pi}{2}$.

Exercice 2

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x – 4 = 0$ ou $9 + x – 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010[e] terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x – 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions – 1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :
a. Si $b = a$, le prolongement est « a b 0 » .
b. Si $b = a – 1$, c'est impossible car les équations $a + x – b = 0$ et $a + x – b = 11$ donnent $x = – 1$ et $x = 11– (a – b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
c. Si $b < a – 1$, on a le chaînonze « a b $(11– a + b)$ » avec $(11 – a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a – 1$, on a : $– 10 < b – a < – 1$ d'où $1 < 11 – a + b < 10$.
d. Si $a < b$, « a b $(b – a)$ » avec $b – a$ est bien un chiffre car $0 < b – a < 10$.
Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a – 1$) soit unique.

5. **1er cas : si $a = b$**

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.

Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.

Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11 – a)$ $(11 – a)$ 0 a a ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2^{e} cas : $a = b + 1$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3^{e} cas : $a = 0$ et $b = 1$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4^{e} cas : $0 < a < b$,

« a b $(b – a)$ $(11 – a)$ $(11 – b)$ $(11 + a – b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b – a = b – 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11 – b = 11 – a – 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5^{e} cas : Si $b = 0$ et $a > 1$

le prolongement est « a 0 $(11 – a)$ $(11 – a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6^{e} cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 – a + b)$ $(11 – a)$ $(11 – b)$ $(a – b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 – a = 11 – a + b – 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

Exercice 3

1. On calcule $n^2 + n + 17$ pour tous les entiers n compris entre 1 et 15.

n	$n^2 + n + 17$
1	19
2	23
3	29
4	37
5	47
6	59
7	73
8	89
9	107
10	127
11	149
12	173
13	199
14	227
15	257

La table des nombres premiers donnée en fin d'énoncé permet d'affirmer que :

Pour tout entier n compris entre 1 et 15, $n^2 + n + 17$ est bien un nombre premier.

Pour $n = 17$, $n^2 + n + 17 = 17 \times 19$ donc **$n^2 + n + 17$ n'est pas un nombre premier pour tout entier naturel choisi au départ**.

2. On résout l'équation (E) : $X^2 + X + 17 = 773$ qui est équivalente à $X^2 + X - 756 = 0$. Cette équation admet deux solutions réelles distinctes : $X_1 = -28$ et $X_2 = 27$. Parmi ces deux solutions, une et une seule est un entier naturel : $X_2 = 27$. Ainsi **l'entier naturel choisi au départ était 27**.

3.

a) **X = 3**

Pour X = 3, X – 2 = 1 donc on doit appliquer l'algorithme de calcul uniquement pour $n = 1$

n	$n^2 + n + 3$
1	5

5 est bien un nombre premier donc **3 est un nombre chanceux**.

X = 5

Pour X = 5, X – 2 = 3, donc on doit appliquer l'algorithme de calcul pour $n \in \{1, 2, 3\}$

n	$n^2 + n + 5$
1	7
2	11
3	17

7, 11 et 17 sont premiers donc **5 est un nombre chanceux**.

X = 11

Pour X = 11, X – 2 = 9, donc on doit appliquer l'algorithme de calcul pour $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

n	***n² + n + 11***
1	13
2	17
3	23
4	31
5	41
6	53
7	67
8	83
9	101

Tous les nombres de la seconde colonne sont premiers donc **11 est un nombre chanceux**.

X = 7

Pour $n = 1$, $n^2 + n + 7 = 9 = 3^2$ donc, pour $n = 1$, $n^2 + n + 7$ n'est pas premier ce qui suffit à affirmer que **7 n'est pas un nombre chanceux**.

X = 13

Pour $n = 1$, $n^2 + n + 13 = 15 = 3 \times 5$ donc on obtient de même que **13 n'est pas un nombre chanceux**.

b) Soit X un nombre entier supérieur ou égal à 3. Raisonnons par contraposition.

Supposons X pair. Alors pour $n = 1$, $n^2 + n + X = 2 + X$ donc $n^2 + n + X$ est un nombre pair supérieur ou égal à 5. Le seul entier pair qui soit premier étant 2, $n^2 + n + X$ n'est donc pas un nombre premier. Il en résulte que X n'est pas un nombre chanceux.

Ainsi, pour que X soit un nombre chanceux, il faut qu'il soit impair.

Remarque : cette condition nécessaire n'est toutefois pas suffisante puisque 7, par exemple, n'est pas chanceux.

c) Il s'agit de mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

Soit X un nombre chanceux. Supposons-le non premier.
Alors il existe deux entiers naturels Y et Z strictement supérieurs à 1 tels que X = YZ.

Il s'agit de prouver que $Y \leqslant X - 2$ c'est-à-dire que $Y \leqslant YZ - 2$ ou encore $2 \leqslant Y(Z - 1)$.
Or, on sait que $Y \geqslant 2$ et $Z - 1 \geqslant 1$ donc $2 \leqslant Y(Z - 1)$ soit $Y \leqslant X - 2$.

X étant chanceux et Y appartenant à $\{2, 3, \ldots, X - 2\}$, on sait alors, en appliquant l'algorithme de calcul pour $n = Y$, que $Y^2 + Y + X$ est premier. Or $Y^2 + Y + X = Y(Y + 1 + Z)$. Comme $Y \geqslant 2$ et $Y + 1 + Z \geqslant 2$, ceci est absurde.

Par suite, si X est un nombre chanceux, alors il est premier.

Remarque : cette condition nécessaire n'est pas non plus suffisante puisque 7, par exemple, n'est pas chanceux.

d) Si X est chanceux, alors, en appliquant l'algorithme pour $n = 1$, $2 + X$ est un nombre premier.

4. On sait qu'il existe seulement 5 nombres chanceux et les quatre premiers sont 3, 5, 11 et 17.

Le cinquième, appelé A, est nécessairement premier d'après 3c, inférieur à 50 d'après l'énoncé, et A + 2 est premier d'après 3*d)*. Donc A ne peut être que 29 ou 41.
Pour X = 29, on applique le programme pour $n = 2$: $2^2 + 2 + 29 = 35 = 7 \times 5$ donc 29 n'est pas un nombre chanceux.

Par conséquent le cinquième nombre chanceux est 41.

Exercice 4

1. Etude des triangles k-progressifs

a) Les côtés d'un triangle 1-progressif ont tous la même longueur, un tel triangle est donc équilatéral.

b) Les longueurs d'un triangle 1,5-progressif dont le plus petit côté a pour longueur 10 cm sont 15 cm et 22,5 cm. On peut alors construire ce triangle.

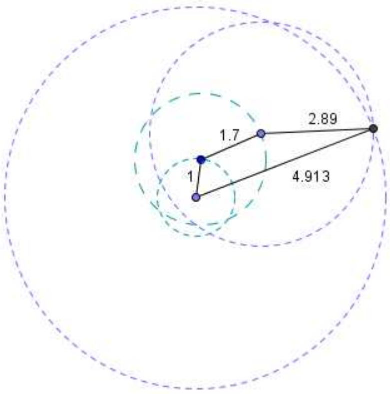
c) Supposons que la longueur du plus petit côté soit égale à 1.
$1{,}7^2 = 2{,}89$; $1 + 1{,}7 = 2{,}7$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire, un triangle 1,7-progressif ne peut exister.

d) La somme des deux plus petites longueurs doit être supérieure à la troisième longueur. On peut supposer que la plus petite est 1. Comme $k \geqslant 1$, alors le plus grand des trois côtés est celui dont la longueur est k^2. On doit avoir $k^2 > 1 + k$ et dans ce cas, on peut construire un triangle k-progressif à partir d'un segment de longueur k^2 en traçant à partir de chaque extrémité deux arcs de cercle de rayon 1 et k. En résolvant l'inéquation $k^2 > 1 + k$ sur $[1 ; +\infty[$, on trouve $1 \leqslant k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

e) Si un triangle k-progressif rectangle existe, alors la propriété de Pythagore entraîne : $1^2 + k^2 = (k^2)^2$.
On trouve alors $k = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Réciproquement, $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ appartient bien à $[1 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ et un triangle $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ -progressif est bien rectangle.

2. Etude des quadrilatères k-progressifs

a) Le quadrilatère ci-dessous est 1,7-progressif.



b) Pour tout quadrilatère, on peut prendre 1 comme longueur du plus petit côté sans perte de généralité. Sachant que $1 + 1{,}9 + 1{,}9^2 = 6{,}51$ et $1{,}9^3 = 6{,}859$, on constate qu'il est impossible de construire un quadrilatère 1,9-progressif.

c) On généralise la propriété vue à la question précédente. Pour un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur 1, k, k^2 et k^3, k doit vérifier $1 + k + k^2 > k^3$.

d) A l'aide de la calculatrice, on obtient :

k	$1 + k + k^2$	k^3
1,82	6,1324	6,0286
1,83	6,1789	6,1285
1,84	6,2256	6,2295

La plus petite valeur écrite avec deux décimales pour laquelle u quadrilatère k-progressif n'existe plus est 1,84.

3. Vers une généralisation

Considérons un polygone à *n* côtés k-progressif, dont le plus petit côté est 1. Ses côtés ont pour longueurs 1, k, k^2, …, k^{n-1}.
On a nécessairement $1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-2} > k^{n-1}$ soit, pour $k \neq 1$, $\boxed{\frac{k^{n-1}-1}{k-1} > k^{n-1}}$.
Si $k \geqslant 2$, alors $\frac{1}{k-1} \leqslant 1$ donc $\frac{k^{n-1}-1}{k-1} \leqslant k^{n-1} - 1 < k^{n-1}$, ce qui contredit l'inégalité encadrée.
Ainsi, pour qu'un polygone k-progressif à *n* côtés existe, il faut que k soit strictement inférieur à 2.

Remarque : On peut montrer que plus le nombre *n* de côtés d'un polygone k-progressif augmente, plus la plus petite valeur k pour laquelle un polygone k-progressif existe est grande et on peut même montrer que cette valeur tend vers 2 lorsque *n* tend vers $+\infty$.