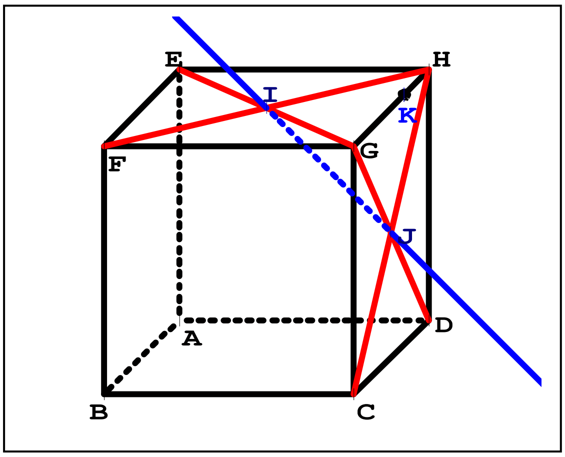
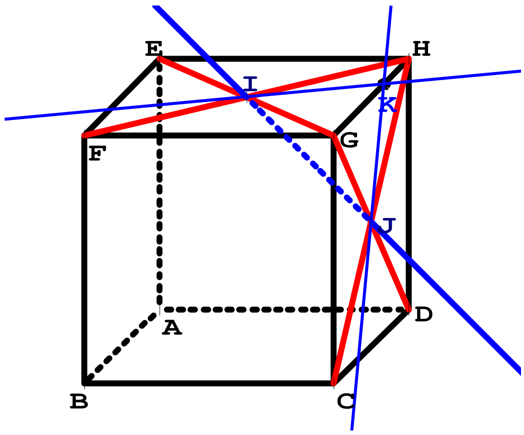
En transperçant un cube



Une activité en Seconde



Enoncé l'activité

ABCDEFGH est un cube
I désigne le centre de la face carrée EFGH
J désigne le centre de la face carrée GHDC
K désigne un point mobile sur le segment [GH].
Le plan (IJK) coupe le plan (ABC) suivant une droite (d).

Quelle est la particularité de cette droite (d) quand le point K décrit le segment [GH]?

Contexte
Cette activité se situe au milieu de l'année en classe de seconde.
Les élèves ont déjà tracé de nombreuses sections de tétraèdres et aussi de cubes coupés par un plan.
Ce type de problème conduit les élèves à effectuer des constructions qui « sortent du cube ».

Pour cette expérimentation, les élèves connaissent le théorème « quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième, l'intersection se fait suivant des droites parallèles ». Ils ont fait connaissance avec Géospace mais ils n'ont jamais utilisé la commande « créer une droite d'intersection entre deux plans » ni « créer un polygone convexe intersection d'un solide avec un plan » ni « créer un point intersection d'une droite et d'un plan » .

Scénario

► J'ai commencé cette activité par un travail différencié de construction du type « papier-crayon » qui était le prolongement direct d'activités déjà rencontrées dans l'année.
J'ai donc distribué à chaque élève une construction à effectuer, l'emplacement du point K variant d'un élève à l'autre (j'avais inséré quelques cas particuliers intéressants pour la suite : K=H , K=G , K égal au milieu M du segment [GH] , K positionné entre M et G, K positionné entre M et H …).
La consigne accompagnant la figure était :

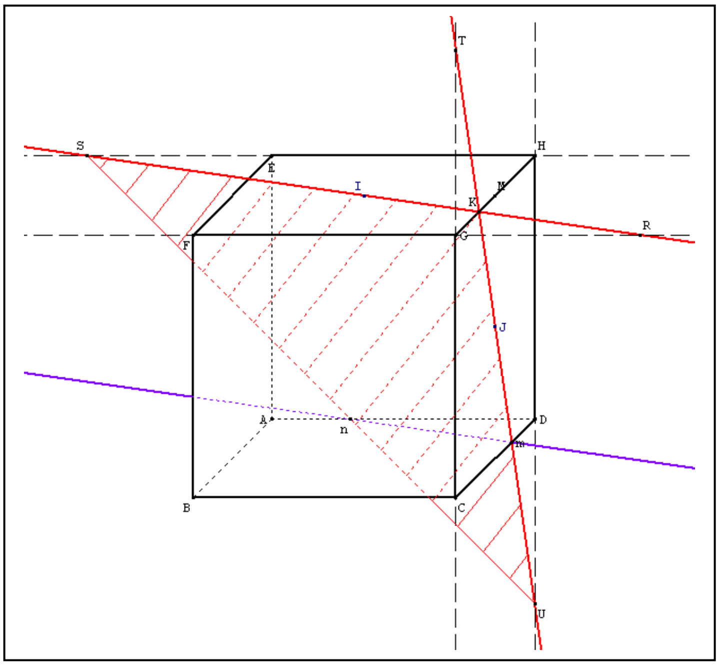
ABCDEFGH est un cube I désigne le centre de la face carrée EFGH J désigne le centre de la face carrée GHDC K désigne un point du segment [GH]. Construire la droite (d) d'intersection des plans (IJK) et (ABC)

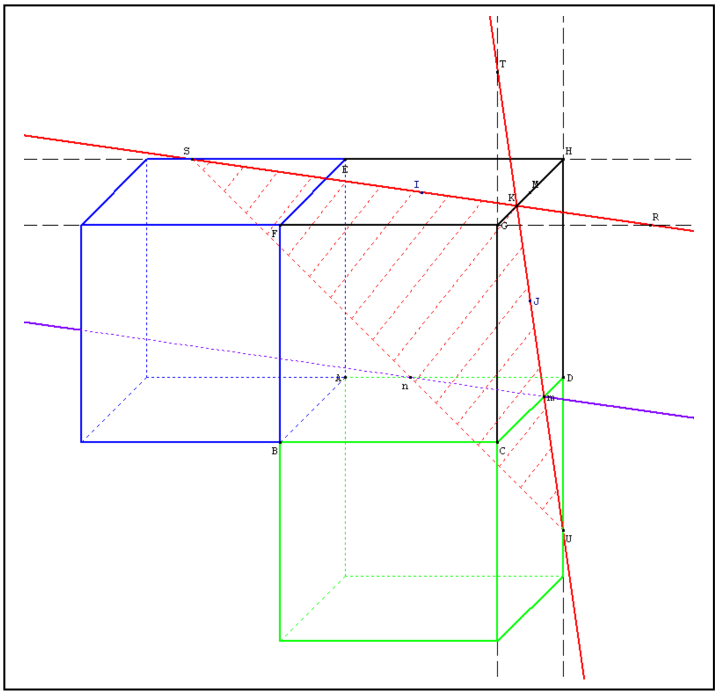
Chaque élève a donc obtenu une droite (d) construite avec crayon et papier.
Deux stratégies différentes sont apparues :

<u>Première stratégie</u> :
Certains ont utilisé des constructions vues en début d'année :
la droite (KI) coupe les droites (FG) et (EH) respectivement en R et S.
la droite (KJ) coupe les droites (GC) et (HD) respectivement en T et U.
On distingue deux cas suivant la position du point K par rapport au milieu M du segment [GH].
On peut aider certains élèves en prolongeant le cube par d'autres solides (voir ci-dessous)

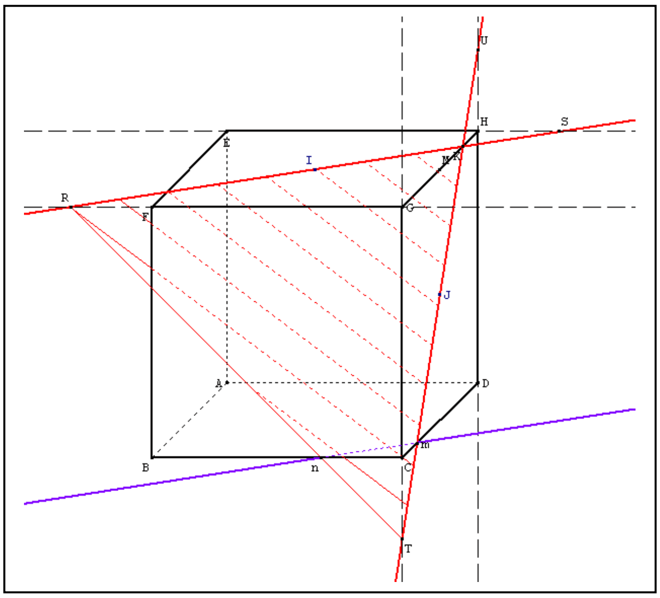
La droite (d) cherchée est la droite (mn). Le cas particulier où K=M est aussi traité.

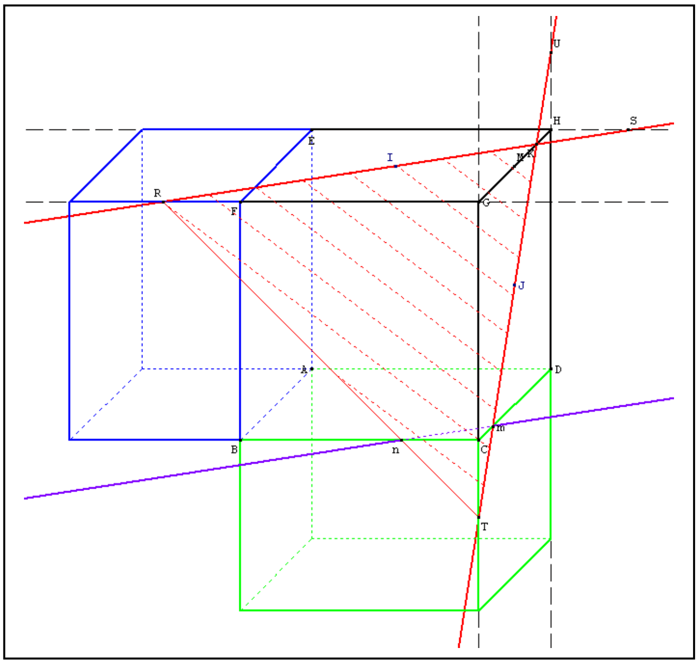
Cas où K est entre M et G :





Cas où K est entre M et H :

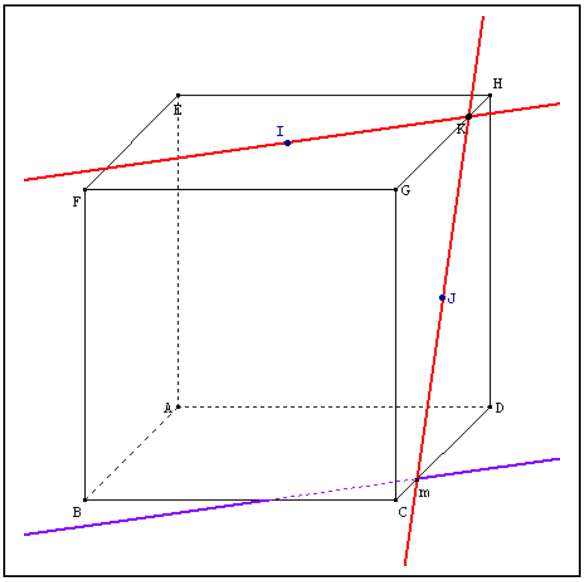


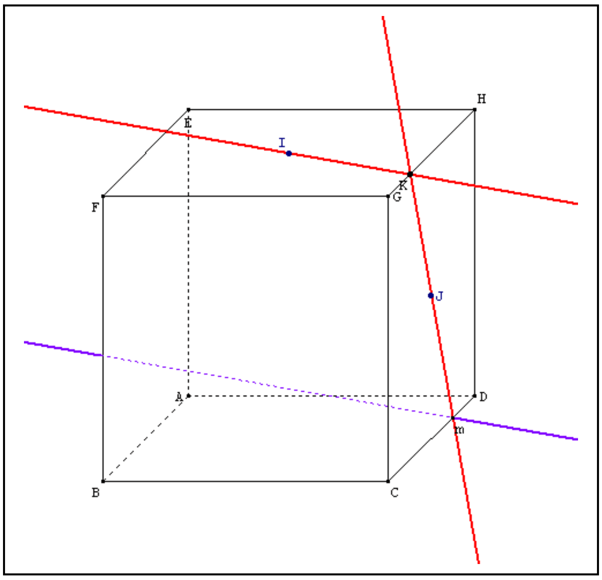


Deuxième stratégie :
Certains ont pensé à réinvestir le théorème cité plus haut : les deux plans parallèles (EFG) et (ABC) étant coupés par le plan (IJK), l'intersection se fait suivant des droites parallèles donc la droite (d) est parallèle à (IK).
En appelant m le point d'intersection des droites (KJ) et (CD), ils concluent que la droite (d) est la parallèle à (KI) passant par m.

J'ai présenté ensuite une correction pour chacune des deux stratégies en projetant une construction pas à pas sous Géospace avec le point K variable sur le segment [GH].

► J'ai ensuite demandé aux élèves de réaliser eux-mêmes la construction sous géospace (classe en demi-groupes avec 2 élèves par poste) en utilisant cette fois la commande « créer la droite d'intersection entre deux plans ». C'est la première fois que cette commande était utilisée.





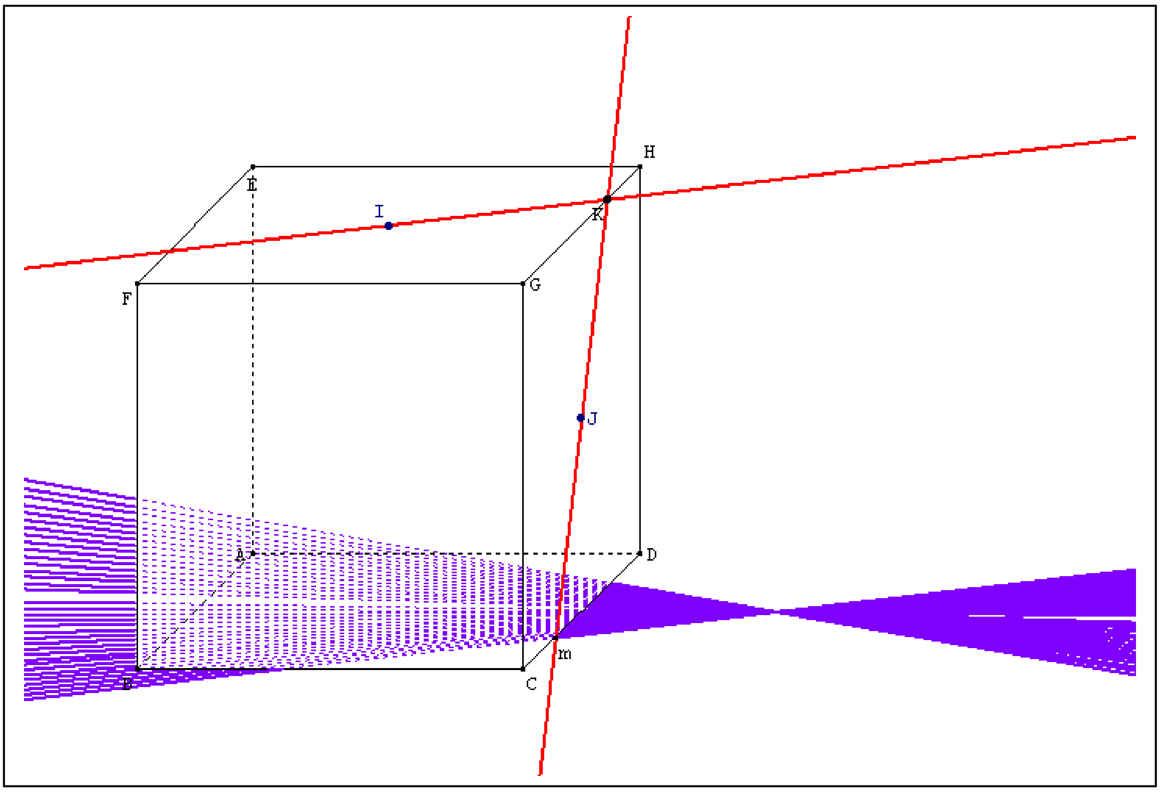
► J'ai alors proposé un nouveau travail :

Quelle est la particularité de la droite (d) quand K décrit le segment [GH]?

Les élèves font bouger le point K et observent le comportement de la droite (d) sans rien conclure.

Le retour sur quelques cas particuliers provoque débat dans la classe : K=H,K=G, K égal au milieu M de [GH].

► Un élève pense à sélectionner le mode trace pour la droite (d) et là le résultat est étonnant.



On peut alors conjecturer que les droites (d) passent toutes par un même point.

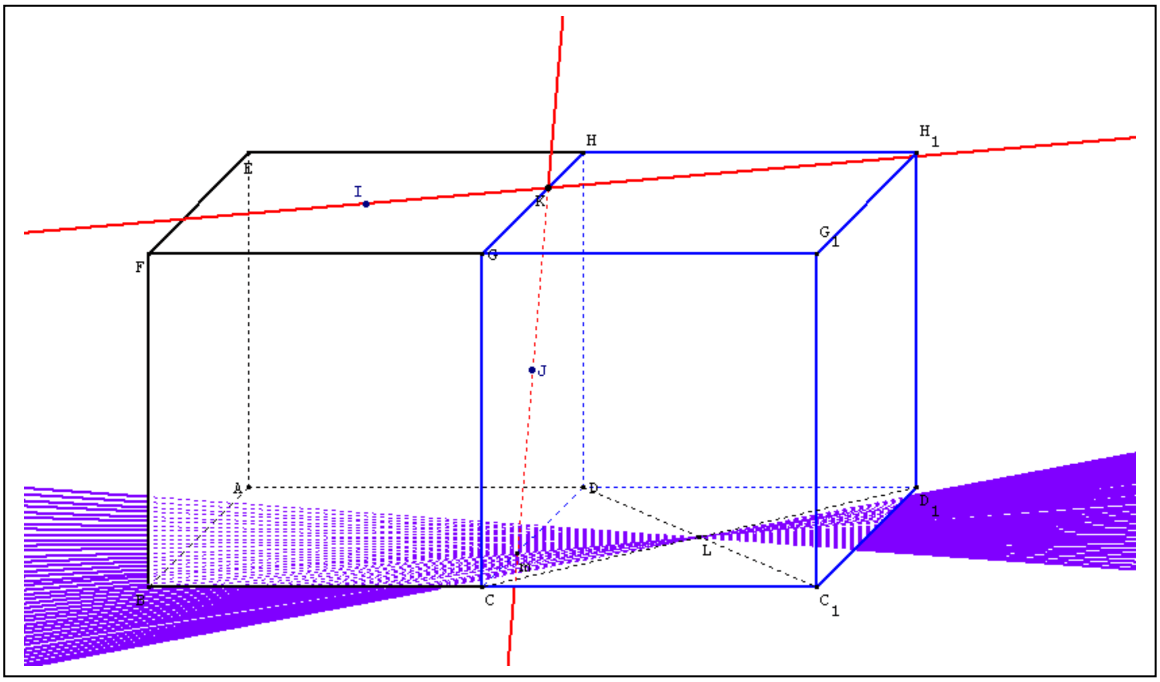
► Preuve attendue :
La droite (IJ) est contenue dans le plan (IJK).
Quand le point K bouge sur le segment [GH], la droite (IJ) reste fixe.
(IJ) n'est pas parallèle au plan (ABCD), donc elle coupe ce plan (ABCD) en un point L. Ce point L appartient à la droite(IJ) donc au plan (IJK) et aussi au plan (ABC) donc ce point L appartient à la droite (d).
Les droites (d) passent donc toutes par le point fixe L, intersection de la droite (IJ) avec le plan (ABC).

► Construction du point L :
Les élèves ont souhaité découvrir la position de ce point L et deux pistes ont été évoquées :

Première idée : le point L est le symétrique du point I par rapport au point J .(preuve par projection de milieu)

Deuxième idée : si on colle à droite du cube ABCDEFGH, un cube identique $CDD_1C_1GHG_1H_1$, le point L apparaît comme le centre de la face carrée CDD_1C_1.

En appelant L' le centre de la face carrée CDD_1C_1, on obtient les égalités $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{JL'}$ qui montrent que J est le milieu de [IL']. Donc L' appartient à la droite (IJ) donc au plan (IJK) et aussi au plan (ABC) donc à toutes les droites (d). D'où L=L'.



► Retour sur le dessin avec « papier-crayon »
Les prolongements précédents permettent d'avoir une construction du point L et chaque élève vérifie que la droite (d) qu'il a construite au début de l'activité passe bien par ce point L.

Compétences expérimentales
► Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour visualiser une situation de l'espace.
► Prendre l'initiative d'observer des cas particuliers
► Prendre l'initiative d'utiliser le mode trace pour découvrir une particularité de la figure.

Prolongement Evaluation

ABCDEFGH est un cube
I désigne un point quelconque appartenant à la face carrée EFGH
J désigne un point quelconque appartenant à la face carrée GHDC
Construire l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (ABCD)