

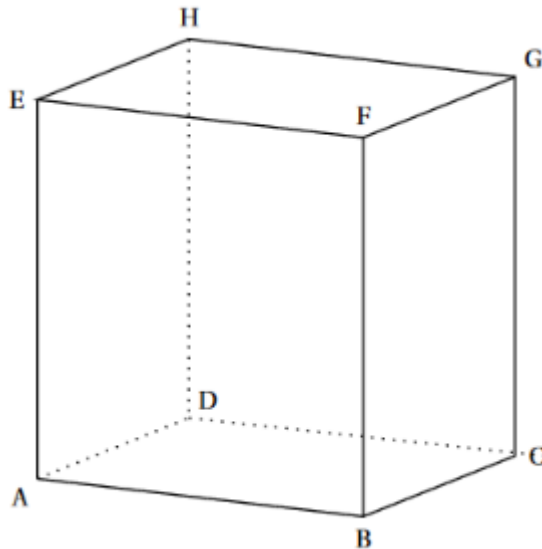
Extrait de l'exercice 3

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ) .

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites (AG) , (BH) , (CE) et (DF) , appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

- Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
- Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

On peut s'intéresser à la question 1.b. en la considérant comme une conjecture :

Les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.

Deux possibilités s'offrent alors :

- Chercher à montrer que cela est vrai, par exemple en identifiant le point de concours.
- Chercher à montrer que cela est faux et alors un contre-exemple suffit : trouver deux hauteurs non sécantes.

Cette deuxième approche est ici plus pertinente en raison d'une réponse assez immédiate : pour être sécantes, deux droites doivent (condition nécessaire non suffisante) être coplanaires.

En identifiant les deux hauteurs (EA) et (BC) , on observe qu'elles ne sont pas coplanaires.

La conjecture n'est pas vérifiée, les quatre hauteurs de ce tétraèdre ne sont donc pas concourantes.