

Le problème suivant a fait l'objet d'un T.P. en salle informatique d'une durée d'une heure du même type que ceux croisés en terminale : voici l'énoncé

Seconde E

Mathématiques

2008/2009

T.P.7 Un T.P. qui ne manque pas d'AIRES ...

PROBLEME

L'unité graphique est le centimètre.

$ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que : $(AD) \perp (AB)$, $AB = 6$, $AD = 6$ et $DC = 2$

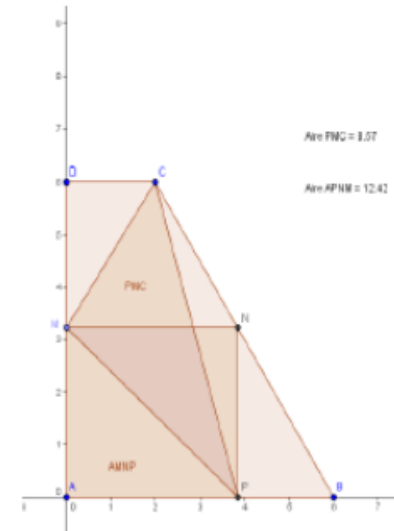
M est un point mobile sur le côté $[AD]$

A partir de ce point M , on définit :

→ le rectangle $AMNP$ avec $N \in [CB]$ et $P \in [AB]$

→ le triangle PMC

QUESTION : Où placer le point M pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit égale à l'aire du triangle PMC ?



1. Conjecture

- A l'aide du logiciel de votre choix, réaliser la figure dynamique répondant aux contraintes de l'énoncé.
- Conjecturer la position du point M répondant à la question posée.

Appeler le professeur pour valider la conjecture

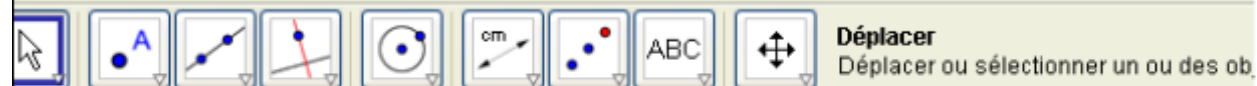
2. Démonstration

- Exprimer l'aire du rectangle $AMNP$
- Exprimer l'aire du triangle PMC
- Démontrer la conjecture émise.

AIDE : si certains calculs vous paraissent « fastidieux », vous pourrez utiliser le logiciel de « calcul formel » DERIVE ..

Réalisé par
les élèves
sur un T.P.
avec des
debuts de
piste
sur

Les élèves ont réussi en grande majorité à construire la figure dynamique répondant aux consignes, ont émis une conjecture quant à la question posée et pour certains, ont ébauché des pistes de recherche sur la démonstration ... avec le passage à $AM = x$.



PROBLEME

L'unité graphique est le centimètre.

$ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que : $(AD) \perp (AB)$, $AB = 6$, $AD = 6$ et $DC = 2$

M est un point mobile sur le côté $[AD]$

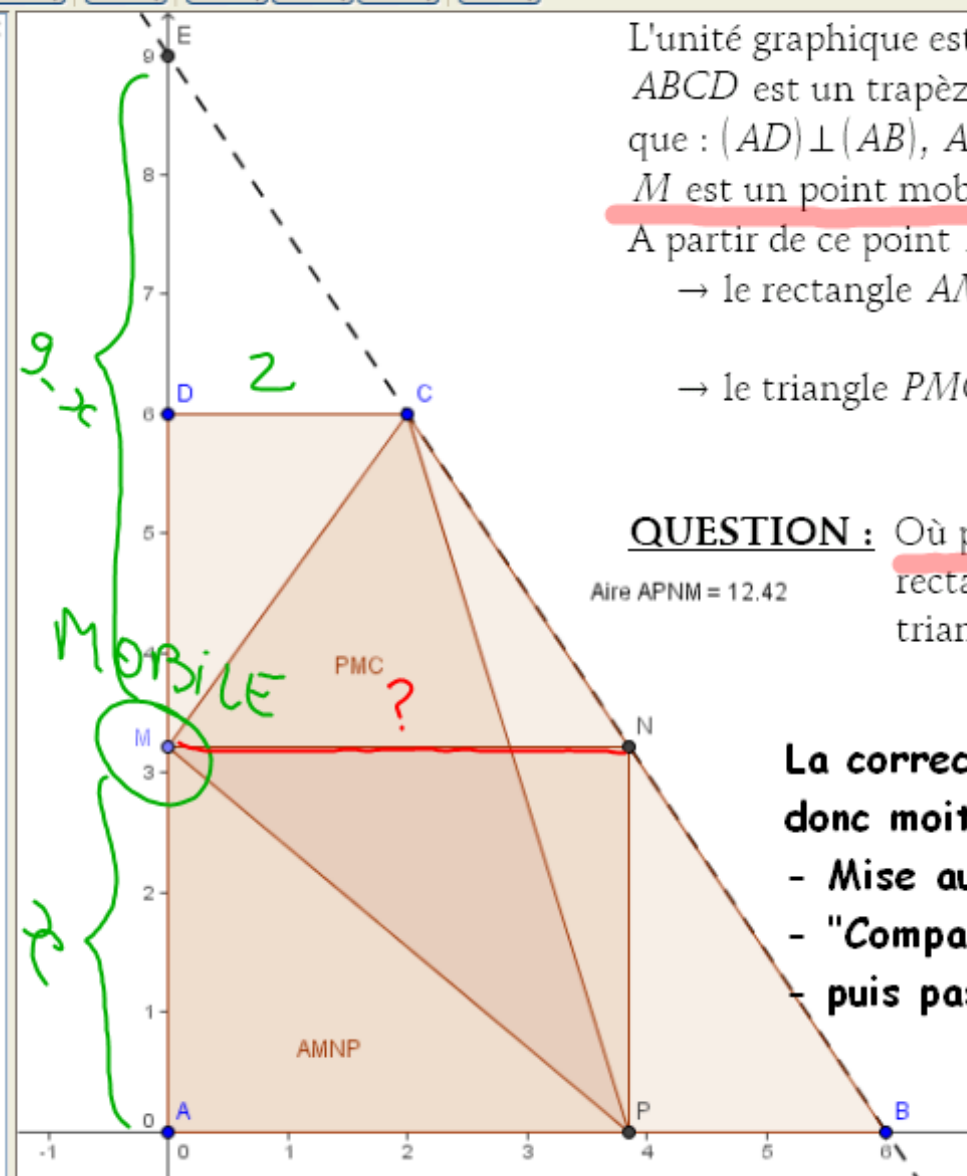
A partir de ce point M , on définit :

→ le rectangle $AMNP$ avec $N \in [CB]$ et $P \in [AB]$

→ le triangle PMC

QUESTION : Où placer le point M pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit égale à l'aire du triangle PMC ?

Aire APNM = 12.42



La correction du T.P. se fait en module ...
donc moitié classe pour plus d'échanges.

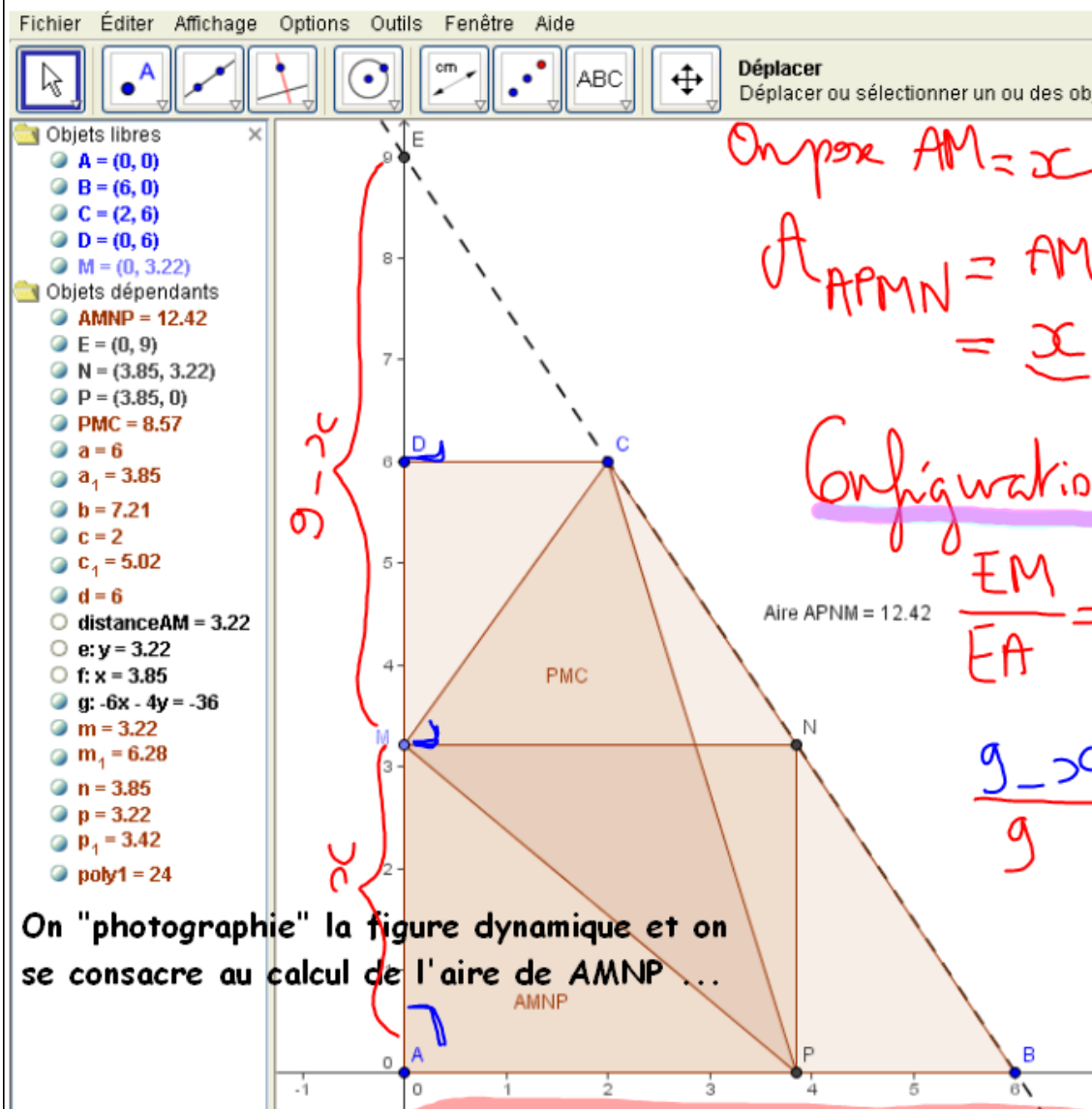
- Mise au point sur l'énoncé
- "Comparaison" des conjectures émises
- puis passage à la démonstration

Objets libres

- $A = (0, 0)$
- $B = (6, 0)$
- $C = (2, 6)$
- $D = (0, 6)$
- $M = (0, 3.22)$

Objets dépendants

- $AMNP = 12.42$
- $E = (0, 9)$
- $N = (3.85, 3.22)$
- $P = (3.85, 0)$
- $PMC = 8.57$
- $a = 6$
- $a_1 = 3.85$
- $b = 7.21$
- $c = 2$
- $c_1 = 5.02$
- $d = 6$
- $\text{distanceAM} = 3.22$
- $e: y = 3.22$
- $f: x = 3.85$
- $g: -6x - 4y = -36$
- $m = 3.22$
- $m_1 = 6.28$
- $n = 3.85$
- $p = 3.22$
- $p_1 = 3.42$
- $\text{poly1} = 24$



On pose $AM = x$ $x \in [0; 6]$

$$A_{APMN} = AM \cdot MN = x \cdot MN \quad \text{MN?}$$

Configuration de Thalès :

$$\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EB} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{9-x}{9} = \frac{MN}{6}$$

$$MN = \frac{6(9-x)}{9} = \frac{2(9-x)}{3}$$

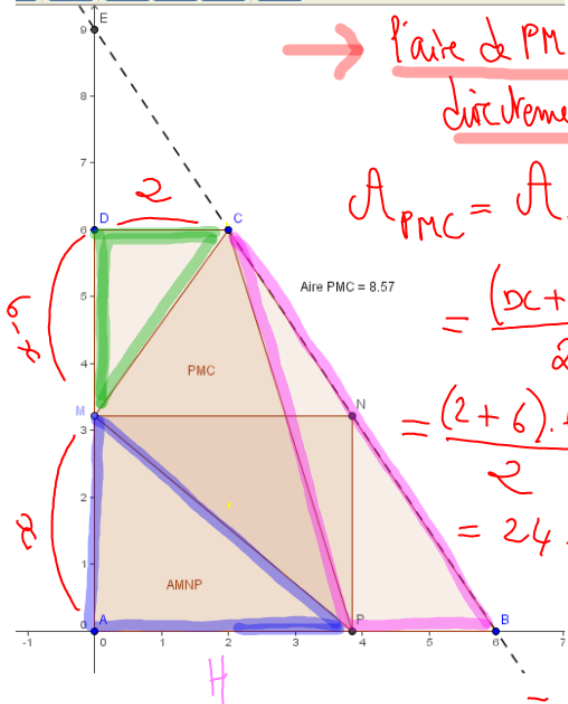
Conclusion :

$$A_{AMNP} = AM \cdot MN = \frac{2x(9-x)}{3}$$



Etape suivante : calcul de l'aire du triangle

PMC par différences d'aires...



→ l'aire de PMC est trop "difficile" à calculer
directement : on passe par différence !

$$A_{PMC} = A_{ABCD} - (A_{MDC} + A_{AMP} + A_{CPB})$$

$$= \frac{(DC + AB) \cdot AD}{2} - \left(\frac{MD \cdot DC}{2} + \frac{AM \cdot AP}{2} + \frac{PB \cdot AD}{2} \right)$$

$$= \frac{(2 + 6) \cdot 6}{2} - \left(\frac{x \cdot (6 - x)}{2} + \frac{x \cdot \left(\frac{2(9-x)}{3}\right)}{2} + \frac{\left(6 - \frac{2(9-x)}{3}\right) \cdot 6}{2} \right)$$

$$= 24 - \left(6 - x + \frac{x(9-x)}{3} + 18 - \frac{4(9-x)}{3} \right)$$

$$= 24 - 6 + x - \frac{x(9-x)}{3} - 18 + 18 - 2x$$

$$= 18 - x - \frac{x(9-x)}{3} \quad \text{ouf!}$$

Correction
d'une
erreur de
calcul

Conclusion: $A_{PMC} = 18 - x - \frac{x(9-x)}{3}$

On ne perd pas de vue la question ... quel x pour que les aires soient égales ?

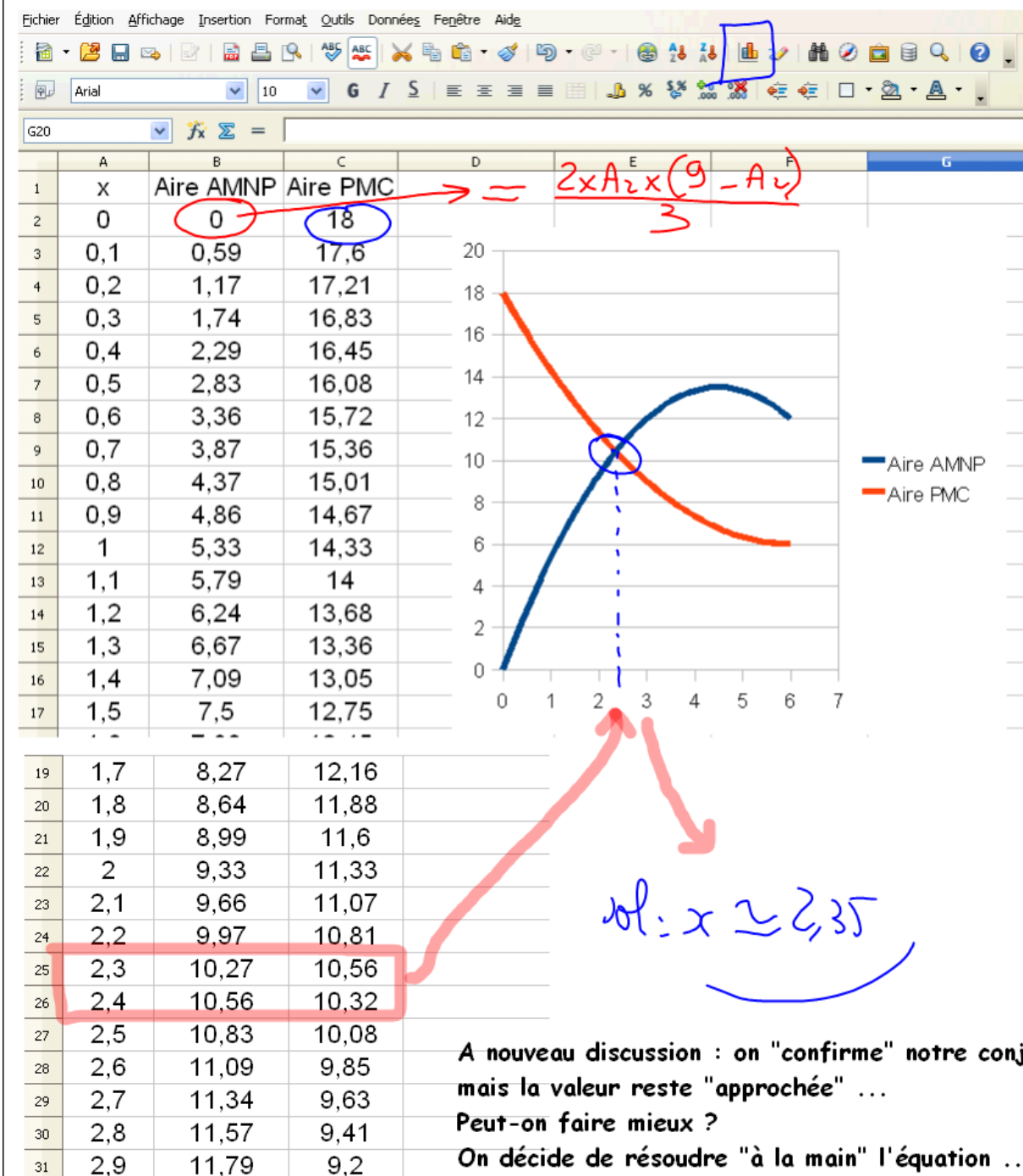
- Discussion dans la classe pour entreprendre une méthode ...

On "photographie" les formules qu'on met côte à côte pour les examiner

Conclusion: $A_{PMC} = 18 - x - \frac{x(9-x)}{3}$

Conclusion: $A_{AMNP} = AM \cdot MN = \frac{2x(9-x)}{3}$

Une idée est émise par un "bon" élève :
utiliser le tableur d'où page suivante



Conclusion: $A_{PMC} = 18 - x - \frac{x(9-x)}{3}$

Conclusion: $A_{AMNP} = AM \cdot MN = \frac{2x(9-x)}{3}$

$$A_{PMC} = A_{AMNP}$$

donc $18 - x - \frac{x(9-x)}{3} = \frac{2x(9-x)}{3}$ (x3)

$$54 - 3x - x(9-x) = 2x(9-x)$$

$$54 - 3x = 3x(9-x)$$

$$54 = 3x + 3x(9-x)$$

$$54 = 3x(1 + 9 - x)$$

c'est $\rightarrow 54 = 3x(10 - x)$ on développe

$$54 = 30x - 3x^2$$

$$3x^2 - 30x + 54 = 0$$

$$x^2 - 10x + 18 = 0$$

Dans les heures précédentes, on a utilisé le logiciel DERIVE pour "vérifier" les solutions d'équations et réaliser des calculs de factorisation, développement et résolutions d'équations. On finit le T.P. en utilisant DERIVE ...

#1: $f(x) := \frac{2 \cdot x \cdot (9 - x)}{3}$
 #2: $g(x) := 18 - x - \frac{x \cdot (9 - x)}{3}$
 #3: $f(x) - g(x)$

$\hookrightarrow A_{\text{Anne}} = f(x)$
 $A_{\text{Pierre}} = g(x)$

Résoudre l'expression #3

Variables de résolution: x

Méthode de résolution:

- ☒ Algébrique
- ☐ Numérique
- ☐ Les Deux

Domaine de résolution:

- ☐ Complexe
- ☒ Réel
- ☐ Limité

Limites de résolution:

- Supérieure: 10
- Inférieure: -10

OK Résoudre Annuler

#4: $\text{SOLVE}(f(x) - g(x), x, \text{Real})$
 #5: $= 0$
 #6:

$x = 5 - \sqrt{7} \vee x = \sqrt{7} + 5$
 $x = 2.354248688 \vee x = 7.645751311$

$\notin [0; 6]$

la seule solution du problème
 est: $x = AM = 5 - \sqrt{7}$
 DERIVE

Fin du T.P :

Deux heures de travail/élève dont 1 heure sur poste pendant laquelle ils ont manipulé le logiciel GEOGEBRA et émis une conjecture et 1 heure en module avec T.B.I.

La correction permet à tous les élèves de participer, soit au T.B.I. soit par manipulation du tableur et de DERIVE dont on fait des photographies.

Il reste au bout de l'heure la trace "intégrale" de la chronologie des débats et on peut sans arrêt revenir en arrière pour répondre à des questions ou à des doutes.

Page suivante : une "péripétie" arrivée dans l'un des deux groupes de module ...

Derive 5 - [Algèbre 1]

Fichier Edition Insérer Auteur Simplifier Résoudre Calculer Déclarer Options Fenêtre Aide

$\#1: f(x) := \frac{2 \cdot x \cdot (9 - x)}{3}$
 $\#2: g(x) := 18 - x + \frac{x \cdot (9 - x)}{3}$!!
 $\#3: f(x) - g(x)$
 $\#4: \text{SOLVE}(f(x) - g(x), x, \text{Real})$
 $\#5: \text{false}$

signification !?

Une erreur a été commise en recopiant la formule donnant l'aire du triangle ... personne ne s'en aperçoit !

On lance la résolution de l'équation et tout le monde sait qu'il y a "au moins" une solution mais ... les élèves sont bilingues" ... DERIVE annonce "false" !!!!

Plusieurs élèves de la classe rient voire ironisent : "il est nul votre logiciel qui retrouve même pas la solution" d'où DISCUSSIONS sur l'erreur (d'étourderie ou de calculs) et sur la posture qu'on adopte lorsqu'on est en position de recherche ... on peut se tromper !