Etude d'une famille de paraboles en première S.

Un classique revisité grâce aux apports des TICE : : moins de technique, plus de démarche expérimentales.

(Tbaleur, grapheur, calculateur formel).

Mise à jour le 14/12/08

P. JONIN

Enoncé de l'activité, pourquoi les TICE ?

Il s'agit d'étudier une famille de paraboles dont l'équation est : $y = (m-3)\,x^2-2(m+2)\,x+ m-5$

Ce type d'exercice a été peu à peu délaissé : son niveau technique est en effet incompatible avec celui couramment constaté chez les élèves. Nous verrons en quoi les TICE permettent de l'envisager à nouveau en classe.

On se propose donc d'étudier :

- Selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 : ceci en utilisant un tableur (première partie de l'activité).
- Le lieu des sommets des paraboles lorsque m parcourt R : seconde activité avec un grapheur et un calculateur formel (seconde partie).

Objectifs mathématiques.

Travailler les notions de variable et de paramètre : distinguer finement ces deux aspects : nous verrons en quoi le tableur facilite cette distinction.

Travailler la classification des paraboles : utilisation du tableur et du grapheur.

Travailler la notion de lieu : qu'est ce qu'un lieu ? (discret, continu ?) COmment le conjecturer, le vérifier, le démontrer ? (avec des reflexions sur les résultats fournis par les différents logiciels utilisés).

Ouvrir l'accès à la démonstration grâce aux TICE : les conjectures réalisées permettent de construire les demonstrations "'classiques".

Travailler la notion d'équation.

Insertion dans la progression mathématique et infomatique (items du B2i abordés).

- ***Mathématique*** : en fin de chapitre sur le second degré, après une première activité autour d'une famille simple de paraboles donnée en devoir libre (étude, selon les valeurs de m du nombre de solutions de l'équation $2x^2-6x+12=m$).
- ***Informatique :*** maîtrise des bases d'un tableur (révision ou apprentissage des "$" pour fixer une cellule), savoir entrer l'équation d'une famille de fonctions avec un grapheur (Sinequanon).

  Le Calculateur formel est ici introduit pour la première fois (notions de base : définir une fonction, simplifier, évaluer, substituer).

  - ***Items B2i travaillés*** :
    - L 3.4 : je sais utiliser ou créer des formules pour traiter les données.
    - L3.5 : je sais produire une représentation graphique à partir d'un traitement de données numériques.
    - L3.6 : je valide à partir de critères définis les résultats qu'un traitement automatique me fournit (calcul, représentation graphique, correcteur...).

- Le scénario choisi.

Cette activité n'a pas été conçu comme une évaluation finale (type épreuve expérimentale), néanmoins le souci de l'évaluation a guidé l'élaboration des scénarios des deux parties.

Dans les deux parties du scénario proposé, l'élève n'a pas le choix du logiciel : une feuille de calcul est demandée dans le première partie alors que dans la seconde il faut d'abord utiliser un grapheur puis un calculateur formel. Ce choix, à priori directif, n'empêche cependant pas une importante liberté lors de la mise en place des démarches (construction puis exploitation de la feuille de calcul, choix des paramètres du grapheur, pilotage du calculateur formel) et facilitera par la suite l'évaluation du travail.

Télécharger la fiche élève n°1 : exploration de la famille au tableur (format pdf).

Télécharger la fiche élève n °2 : recherche d'un lieu de points avec un grapheur et un calculateur formel (format Pdf).

La première partie de l'activité (45 minutes en salle informatique, 15 minutes de synthèse).

On se propose ici d'explorer la famille de paraboles avec un tableur.

Le travail à la main et le travail sur le tableur sont volontairement imbriqués : l'élève commence par s'approprier la situation à la main pour une valeur donnée de m (On demande une étude pour m=11 qui donne un delta simple et deux solutions réelles distinctes). L'élève reprend ensuite cette situation avec le tableur (on construit un tableau de valeurs très simple).

On souhaite ensuite pouvoir faire varier m : on demande alors de construire une feuille avec un cahier des charges précis (mais pas d'indication "informatique "; voir l'énoncé donné aux élèves...) .

Le choix de donner un cahier des charges et non des procédures informatiques, permet de cadrer le travail demandé tout en laissant une grande liberté aux élèves pour organiser leur feuille. Ceci facilitera par ailleurs l'évaluation du travail des élèves (tous les critères du cahiers des charges ont-ils été traités ?) .

La feuille réalisée est ensuite utilisée pour explorer la situation (rechercher des valeurs de m avec des conditions données sur le nombre de solutions de l'équation P(x)=0) : une nouvelle fois des demandes précises sont faites aux élèves (donc évaluables facilement) . Mais les démarches à mettre en oeuvre ne sont pas indiquées...**On espère ici une mise en place de démarches expérimentales.**

On conclut cette première partie par un travail à la maison (ou en fin de séquence pour les élèves rapides) : recherche (algébrique), selon les valeurs de m, du nombre de solutions de l'équation P(x)=0. On corrigera ensuite en classe (15 minutes avec projection et test d'une feuille produite par un élève).

La seconde partie de l'activité (1 heure en salle informatique, avec synthèse du professeur au vidéoprojecteur).

Il s'agit dans cette partie de déterminer le lieu des sommets des paraboles lorsque m parcourt R. Un grapheur permettra de visualiser globalement la famille et de poser une conjecture. Cette conjecture pourra être immédiatement visualisée sur le grapheur (première vérification). On demande de produire un graphique qui pourra être évalué.

On Utilisera ensuite un calculateur formel pour s'affranchir des difficultés techniques importantes liés à cette recherche et se centrer sur les méthodes. Plusieurs démarches sont envisageables : une grande liberté est donc laissé ici aux élèves.

Le déroulement observé, des travaux d'élèves.

Pour la première partie (qui correspond à la fiche élève n° 1).

Une bonne partie des élèves réalisent le tableau de valeurs pour m = 11 très rapidement. Les difficultés apparaissent lors de la seconde étape où il s'agit de pouvoir faire varier m mais aussi calculer le discriminant et afficher les racines : beaucoup ont oublié (ou n'ont jamais vu...) la notion de $ permettant de fixer une cellules. (Les élèves ne distinguent pas le statut différent de x et m et tentent de copier- glisser de la même façon...). Il conviendra donc, si l'on souhaite que cet obstacle ne fasse pas écran à cette activité, de s'assurer de la maîtrise par les élèves de cette notion.

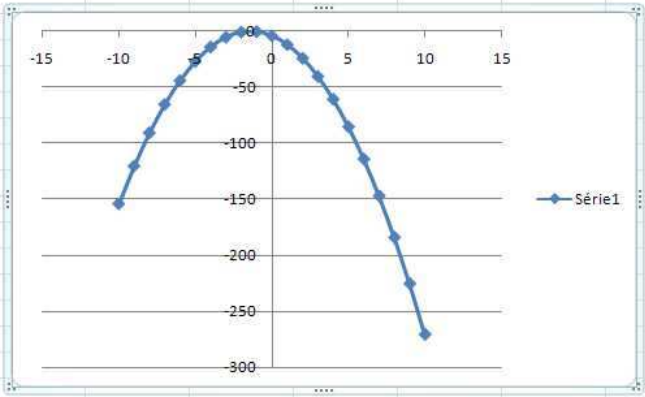
Il faut noter que l'idée de créer une case pour chacun des coefficients du polynôme ne s'impose pas à tous.

29 des 31 élèves réussissent en final à construire la feuille répondant au cahier des charges.

L'exploitation de la feuille construite se révèle très intéressante : les élèves explorent la situation en faisant varier m. Beaucoup privilégient la représentation graphique au dépend du tableau de valeur ou mieux du Delta et des racines : ils donnent ainsi m =1 pour une unique solution (la valeur exacte a été choisie pour ne pas être accessible par tâtonnement : 11/12). Le graphique en effet ne permet pas de conclure clairement. Je demande alors de jeter un oeil sur le Delta: il n'est pas nul !

Une course vers une valeur approchée de m commence alors (voir la feuille ci-dessous d'une élève qui trouve m = 0,91667 !). Une demarche classique (à la main) s'impose : elle est à réaliser pour le cours suivant : 15 minutes suffiront pour corriger cette démarche (en partant d'une feuille réalisée par un élève). Je précise que cette séquence permettra à quelques élèves de valider l'item B2i L3.4 qui n'avait pas été travaillé par tous en seconde (j'ai récupéré et corrigé tous les fichiers des élèves).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	P(x)	m	a	b	c		
2	-10	-154,08293	0,91667	-2,08333	-5,83334	-4,08333		
3	-9	-120,333						
4	-8	-90,74973						
5	-7	-65,33312						
6	-6	-44,08317		delta	0,00016			
7	-5	-26,99988		x1	-1,40303963			
8	-4	-14,08325		x2	-1,39696805			
9	-3	-5,33328						
10	-2	-0,74997						
11	-1	-0,33332						
12	0	-4,08333						
13	1	-12						
14	2	-24,08333						
15	3	-40,33332						
16	4	-60,74997						
17	5	-85,33328						
18	6	-114,08325						
19	7	-146,99988						
20	8	-184,08317						
21	9	-225,33312						
22	10	-270,74973						
23								
24								

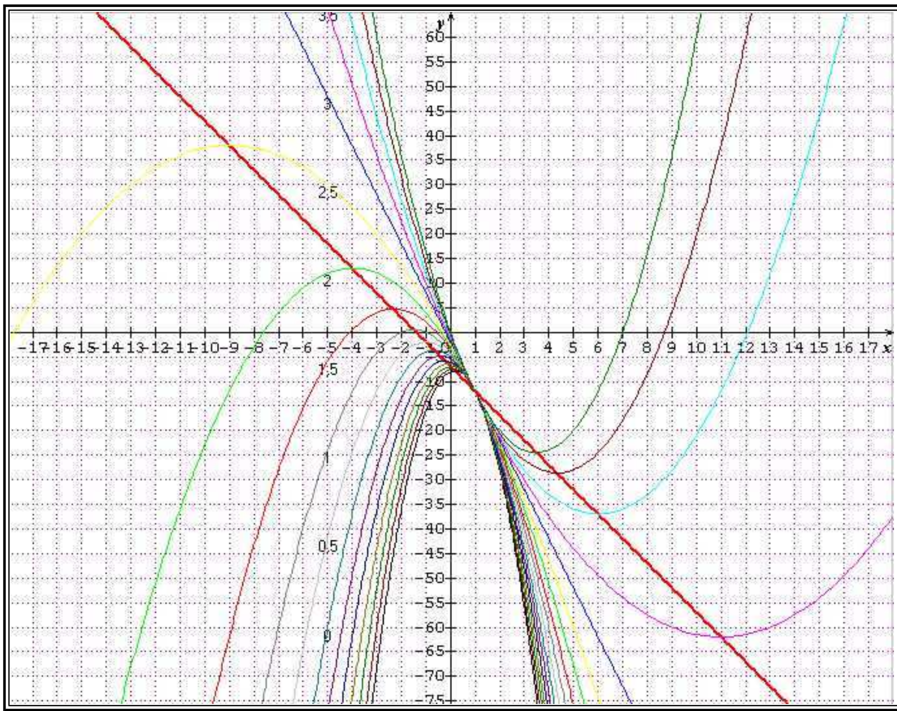


Télécharger fichier Excel.

Pour la deuxième partie (voir fiche élève n° 2).

Voici un exemple de graphique produit par un élève : il a fait apparaître une partie de la famille ainsi que la conjecture quant au lieu des sommets (la droite qui apparaît en rouge). La majorité des élèves conjecturent rapidement la nature du lieu . En revanche beaucoup éprouvent des difficultés à en determiner une équation (Personne n'essaie de déterminer des cordonnées de sommets par le calcul : tous lisent directement l'équation sur l'écran).

Ceux qui ne savent plus lire une équation de droite retrouvent le principe (notion de coefficient directeur et ordonnée à l'origine) en testant un grand nombre d'équations avec le grapheur : la très grande majorité conjecture correctement l'équation.



Télécharger fichier Sinequanon.

Dernière étape : le calculateur formel.

Les élèves n'ont jamais manipulé le logiciel (Maple V). Je donne donc des indications à la classe entière sur les bases (définir une fonction ou une expression, simplifier une expression).

Voici un exemple de page attendue (Sous Maple, compatible Xcas) :

```
> P:=x->(m-3)*x^2-2*(m+2)*x+m-5;
```

$$P := x \to (m-3)\,x^2 - 2\,(m+2)\,x + m - 5$$

```
> #Retour sur la première partie (se rassurer !): retrouver m =11/12...
> solve(P(x)=0,x);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\,m+4+2\sqrt{12\,m-11}}{m-3},\ \frac{1}{2}\,\frac{2\,m+4-2\sqrt{12\,m-11}}{m-3}$$

```
> # Calculs de XS et YS
> XS:=2*(m+2)/(2*(m-3));
```

$$XS := 2\,\frac{m+2}{2\,m-6}$$

```
> YS:=P(XS);
```

$$YS := 4\,\frac{(m-3)\,(m+2)^2}{(2\,m-6)^2} - 4\,\frac{(m+2)^2}{2\,m-6} + m - 5$$

```
> simplify(YS);
```

$$-\frac{12\,m-11}{m-3}$$

```
> # Première stratégie : utilise et on vérifie notre conjecture.
> simplify(-5*XS-7);
```

$$-\frac{12\,m-11}{m-3}$$

```
> # Seconde stratégie : on guide le calculateur pour exprimer YS en fonction de Xs.
> subs(m=(2+3*x)/(x-1),YS);
```

$$4\,\frac{\left(\frac{2+3\,x}{x-1}-3\right)\left(\frac{2+3\,x}{x-1}+2\right)^2}{\left(2\,\frac{2+3\,x}{x-1}-6\right)^2} - 4\,\frac{\left(\frac{2+3\,x}{x-1}+2\right)^2}{2\,\frac{2+3\,x}{x-1}-6} + \frac{2+3\,x}{x-1} - 5$$

```
> simplify(%);
```

$$-5\,x-7$$

<u>Télécharger le fichier Maple.</u>

Rapidement les élèves demandent le calcul de xS et yS et apprécient la capacité du logiciel à simplifier l'expression de yS.

La vérification de la conjecture est plus délicate. J'avais envisagé trois stratégies :

1. On vérifie la conjecture précédente (Y = -5x -7) avec les coordonnées du sommet S. Ce qui constitue néanmoins une démonstration…
2. On substitue m dans Ys (par son expression en fonction de x).
3. On trace en coordonnées paramétriques Le point S (xS, yS).

En pratique les élèves ne vont aborder que la première stratégie (certains avec une aide conséquente).

Remarque : Je n'aborderai pas le problème de savoir si la droite est entièrement atteinte (cas où m = 3).

Pour conclure : je montre les deux autres stratégies en classe au vidéoprojecteur.

- Apports des TICE.
  - ***Le tableur :***
    - Il va permettre d'explorer la situation sous trois aspects **(à choisir judicieusement selon les questions !) :**
      - **Numérique** par le biais d'un tableau de valeurs (avec les difficultés inhérentes à ce type de démarche : approximations, codage des décimaux sous la forme d'une mantisse...)
      - **Graphique** par le biais d'une représentation sous la forme d'un nuage de points (ce nuage ne se réduisant pas à la représentation stricte du tableau précédent).
      - **Synthétique** : par le biais de l'affichage du delta et des coefficients du polynôme (même s'ils sont affichés sous un format numérique ...).
    - La construction de la feuille de calcul implique de distinguer finement la différence entre une variable (ici x) et un paramètre (m).
  - ***Le grapheur*** sera utilisé dans une seconde phase pour visualiser la famille de paraboles (et non une parabole donnée correspondant à une valeur fixée de m) : il permettra d'abord de conjecturer la nature du lieu cherché (une droite ...) puis de confirmer la justesse des calculs réalisés.
  - ***Enfin le calculateur formel*** permettra de s'affranchir des difficultés techniques pour se centrer sur la démarche (notion d'équation, bien identifier le statut de x, y et m).

Les compétences expérimentales pouvant être évaluées.

- ***Avec le Tableur***
  - Organiser une feuille de calcul (tableau de valeurs, graphique (quel type a été choisi), gestion des variables et des paramètres.

- Piloter le paramètre m pour répondre aux questions : aller-retours entre la théorie et la représentation ponctuelle, tâtonner pour chercher des valeurs de m qui correspondent aux conditions demandées.
- Choisir le bon indicateur entre le tableau de valeurs, le graphique, le discriminant, les racines.
- Prendre l'initiative de créer des paramètres supplémentaires (autre que m...) pour modéliser la situation : les trois coefficients du polynôme.

Le fait de récupérer en fin d'heure la feuille produite par l'élève ainsi que l'énoncé avec les réponses permettra de vérifier la mise en place de ces compétences.

- ***Avec le grapheur :***
  - Régler les paramètres d'affichage de la famille : sur quel intervalle est-il intéressant d'étudier m (lien avec l'étude théorique), quel pas d'incrémentation choisir pour m, quelle fenêtre d'étude prendre pour observer tous les cas possibles de paraboles...
  - Conjecturer le lieu et son équation.
  - Prendre l'initiative de représenter sur le même graphique le lieu cherché à partir de l'équation conjecturée précédemment.
  - Les cas limites pour m sont-ils visibles sur le graphique obtenu ?

On récupére ici en fin d'heure le graphique et la conjecture qui pourront être évalué.

- ***Avec le Calculateur formel : on peut envisager au moins deux stratégies.***
  - On part de l'équation conjecturée avec le grapheur et on la vérifie...(ce qui constituera néanmoins une démonstration !)
  - On exprime YS en fonction de XS en remplaçant m par son expression en fonction de x.
  - On représente en coordonnées paramétriques le nuage des points S(xS, yS) lorque m parcourt R.

Le fichier est ici aussi récupéré et analysé pour évaluation.