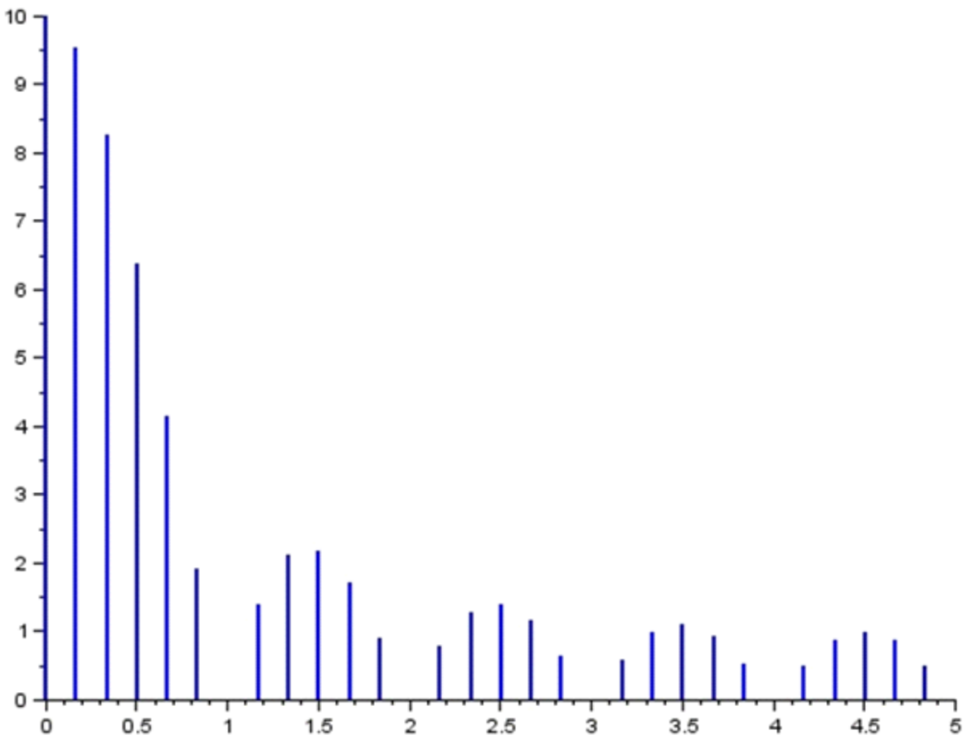
BTS SN – Interprétation de la lecture graphique d'un signal



Thème abordé

1. Problématique, situation d'accroche

Le but de cette activité est d'observer les particularités graphiques de la TFD d'un signal et d'en justifier certaines via un calcul.

Situation d'accroche : le graphique ci-dessus représente la transformée de Fourier discrète d'un signal. Il s'agit d'observer les particularités de ce graphique et de conduire des calculs permettant de les justifier mathématiquement.

2. Frontières de l'étude et prolongements possibles

Pour certains étudiants, il s'agira simplement d'observer et de poser le calcul qui permettrait de justifier, sans le conduire à son terme. Pour d'autres, certains calculs pourront être menés au bout (avec coups de pouce apportés par l'enseignant).

Une question prolongeant cette étude, ne portant pas sur la TFD, est proposée pour poursuivre ce travail.

Objectifs pédagogiques

1. Disciplines impliquées

Pour cette activité, seules les mathématiques sont impliquées.

2. Prérequis

Les élèves doivent savoir utiliser : le symbole Σ et sa manipulation, la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, les propriétés importantes des nombres complexes de module 1, la définition de la transformée de Fourier discrète à l'aide du symbole Σ, la notion d'échantillon.

3. Capacités

Les étudiants doivent savoir déterminer un échantillon. Ils doivent utiliser la formule définissant la TFD et manipuler des calculs avec des nombres complexes de module 1.

4. Compétences

Les étudiants sont montrent leur capacité à changer de registre et à prendre des initiatives. L'habileté calculatoire est mise en jeu.

Outils

Les étudiants pourront librement utiliser les outils numériques à disposition (notamment un logiciel de calcul formel).

Contenu de la fiche

On étudie dans cet exercice un signal « porte ».

On note s le signal défini sur **R** par s(t)=1 si $t \in [0,1[$ et 0 sinon.
On échantillonne ce signal pour $t \in [0,6[$ à une fréquence Fe = 10.

Quelques formules utiles pour cet exercice :

Si on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{10}}$, on a :
$\sum_{k=0}^{9} \omega^k = 0$.
On rappelle que $\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1-x^N}{1-x}$ et $\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{(N-1)\times N}{2}$.

Questions :

1) Donner des précisions sur l'échantillon.
2) Retrouver par le calcul au moins une valeur que l'on peut lire graphiquement.

Prolongement :

On peut prolonger ce travail mathématique par une étude de la fonction sinus cardinal puisque la représentation fréquentielle obtenue à l'exercice précédent peut être modélisée par une fonction évoquant la fonction sinus cardinal définie sur **R** par :

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{x} \; si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}.$$

1) Représenter graphiquement cette fonction.
2) Représenter sur **R**+ la valeur absolue de la fonction sinus cardinal. Cette nouvelle fonction présente des « lobes « d'amplitude décroissante. Lire graphiquement, puis trouver par le calcul l'amplitude du deuxième lobe.
3) Quel est le pourcentage d'évolution entre la valeur maximale du lobe principal et celle du deuxième lobe ?

Eléments de réponse :

1) Quelques réponses qui peuvent être proposées : taille de l'échantillon, période d'échantillonnage, les valeursx_0 , x_1, …, x_{59} (valant 1 de 0 à 9 et 0 de 10 à 59), graphique avec les échantillons représentés.
2) On peut montrer par le calcul que la valeur de X_0 est 10 : le calcul à conduire est $\sum_{k=0}^{59} x_k \omega^{-k\times 0}$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{60}}$.

   On peut montrer par le calcul que la valeur de X_6 est 0 : $X_6 = \sum_{k=0}^{59} x_k \omega^{-k\times 6} = \sum_{k=0}^{9} e^{-i\frac{2\pi\times 6}{60}}$ =…

Notions : les notions d'échantillon et de TFD interviennent dans cette fiche.

Activité de l'étudiant : l'étudiant est amené à analyser le graphique proposé, à montrer sa compréhension de ce qu'est un échantillon, à faire le lien avec la formule de TFD vue en classe (alternativement, on peut adapter cette activité pour servir d'introduction à la formule de TFD), à poser des calculs et éventuellement à les mener à bien.

Considérations didactiques : les étudiants peuvent être bloqués sur la détermination de l'échantillon, sur l'application de la formule générale du cours à un cas particulier. La conduite des calculs est technique et n'est accessible qu'à peu d'étudiants. Poser au moins le calcul à conduire permet à tous les étudiants de comprendre qu'il y a une justification possible de ce qui est observé et à prendre en main la formule définissant la TFD, qui n'est que peu utilisée dans les autres situations.

Points méthodologiques : des coups de pouce doivent être anticipés (graphique montrant l'échantillonnage du signal : il reste à l'étudiant à trouver la taille de l'échantillon, les différentes valeurs … ; formule de TFD avec la bonne taille d'échantillon ; limitation à la valeur en 0).