BTS SN – Fiche 12: des séries de Fourier à la TFD.

Thème abordé

1. Problématique

Le but de cette fiche est d'expliquer, dans un cas particulier, la signification des nombres complexes obtenus par TFD.

2. Frontières de l'étude et prolongements possibles

Les étudiants ont vu le lien en physique entre les coefficients des séries de Fourier et le spectre de fréquence.Cette fiche, qui se veut plus théorique, n'est destinée qu'aux enseignants désireux de mieux comprendre ce lien.

Contenu de la fiche

Soit s une fonction périodique, de période T, intégrable sur [0,T].

La série de Fourier de la fonction s est la série trigonométrique:

$$S(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}[a_k\cos(\frac{2k\pi t}{T})+b_k\sin(\frac{2k\pi t}{T})]$$

On pose $\boxed{a_0=C_0}$

pour tout $k\geqslant 1$, $\boxed{\begin{array}{l} a_k=C_k+C_{-k} \\ b_k=iC_k-iC_{-k}\end{array}}$ ou $\boxed{C_k=\frac{a_k-ib_k}{2}}$

On obtient alors $s(T)=\sum_{k\rightarrow\mathbb{Z}} C_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$

avec $C_k=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-i\frac{2k\pi t}{T}}dt$, on échantillonne t de 0 à $(N-1)T_e$

Si on échantillonne le signal sur une période, on a $T=N*T_e$, t est une séquence de 0 à $(N-1)T_e$ par pas de T_e .

$$C_k\simeq\frac{T_e}{T}\sum_{l=0}^{N-1}s(lT_e)e^{-i2\pi k\frac{lT_e}{T}}$$ (méthode des rectangles).

$$C_k\simeq\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}s(lT_e)\omega^{-kl}$$ avec $\omega=e^{i\frac{2\pi}{N}}$

$$C_k\simeq\frac{1}{N}*X_k$$

La TFD fournit les valeurs approchées de $N*C_k$.

<u>Conclusion</u>:

Lorsque l'on échantillonne un signal périodique réel de fréquence F sur exactement une période (on dit que la TFD est exacte): $T=N*T_e$ ou $\frac{F_e}{N}=F$.

La TFD fournit alors une séquence de N nombres complexes $(X_0, X_1, \ldots, X_{N-1})$, valeurs approximatives des nombres $(NC_0, NC_{1,} \ldots, NC_{N-1})$.

On a alors:

_ si le signal s est pair, $a_0=C_0 \simeq \frac{X_0}{N}$

$$a_k=C_k+C_{-k}=2R_e(C_k) \simeq \frac{2R_e(X_k)}{N}$$

_ si le signal est impair, $b_k=iC_k-iC_{-k}=-2I_m(C_k)=-\frac{2I_m(X_k)}{N}$.

Tous les exercices sur les séries de Fourier peuvent être donnés dans le chapitre sur la TFD si l'échantillonnage est bien choisi.

Voici quelques exemples d'utilisation: