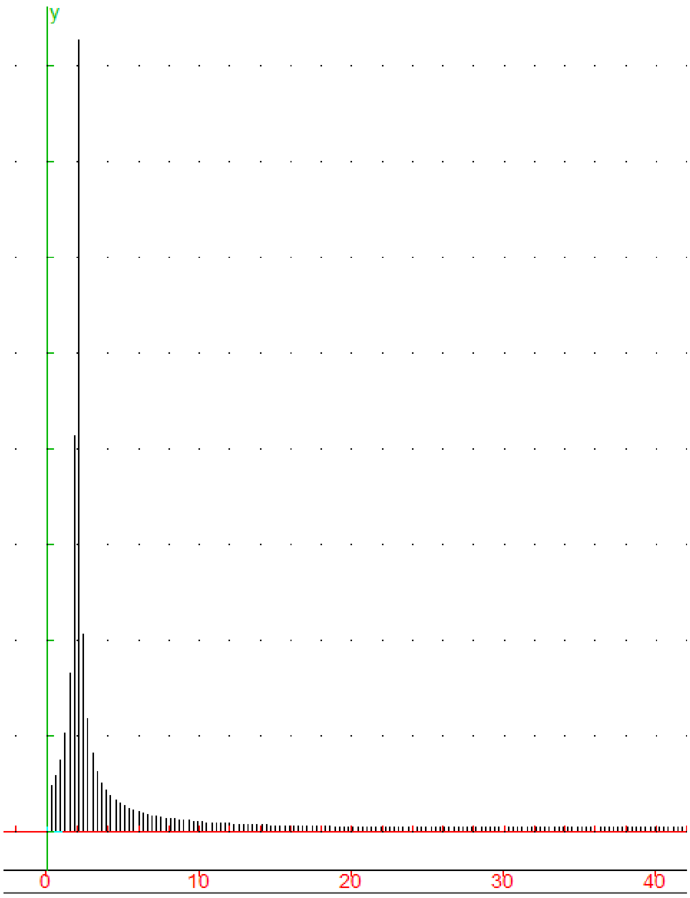
BTS SN – Fiche 14:TFD d'une exponentielle complexe.



Thème abordé

1. Problématique, situation d'accroche

Le but de cette activité est d'introduire la notion d'impulsion de Dirac par la TFD d'une exponentielle complexe et surtout de comprendre la TFD d'une sinusoïde.

2. Frontières de l'étude et prolongements possibles

Pour certains étudiants, il s'agira d'observer et de poser le calcul qui permettrait de justifier, sans le conduire à son terme. Pour d'autres, certains calculs pourront être menés au bout (avec éventuellement quelques coups de pouce apportés par l'enseignant).

Objectifs pédagogiques

1. Discipline impliquée

Mathématiques

2. Prérequis

Savoir utiliser: le symbole Σ et sa manipulation, la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, les propriétés importantes des nombres complexes de module 1, la définition de la transformée de Fourier discrète à l'aide du symbole Σ, la notion d'échantillon.

3. Capacités et compétences

Savoir déterminer un échantillon. Ils doivent utiliser la formule définissant la TFD et manipuler des calculs avec des nombres complexes de module 1. Les étudiants montrent leur capacité à changer de registre et à prendre des initiatives. L'habileté calculatoire est mise en jeu.

Outils

Les étudiants pourront librement utiliser les outils numériques à disposition, notamment un logiciel de calcul formel, web.Un fichier XCAS est fourni.

Contenu de la fiche

PARTIE A:

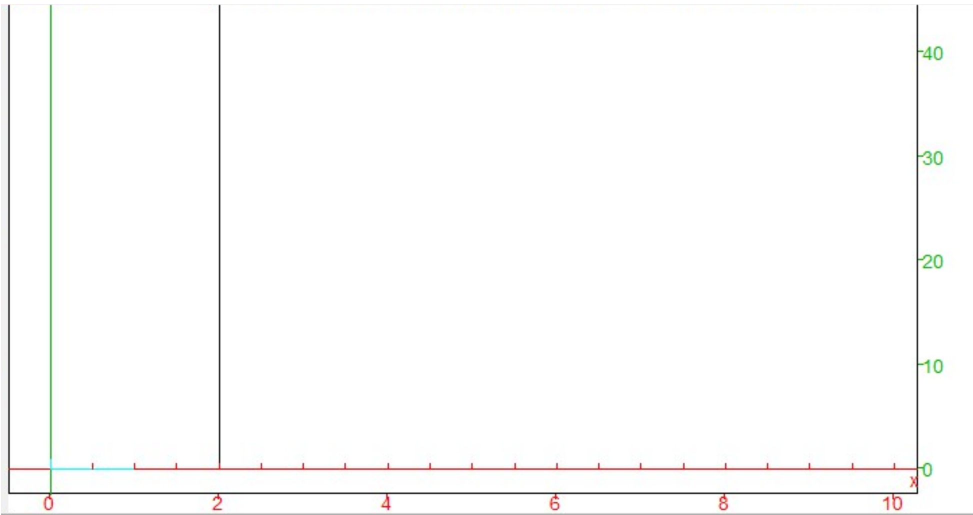
On considère la fonction s_1 , à valeurs complexes, définie pour tout t de IR par

$s_1(t)=e^{2i\pi ft}$ où f est un nombre réel.

1) Justifier que f est la fréquence du signal s_1 .

   Dans la suite de l'exercice, on pose f = 2.

2) Dans un fichier Xcas, on a échantillonné le signal à une fréquence d'échantillonnage $F_e=10\text{Hz}$ sur N = 50 points.



(on obtient ce que l'on appelle un Dirac en 2Hz)

a) Ouvrir le fichier XCAS et compléter le tableau suivant:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_k											

b) Vérifier ,par calcul, que $X_0=0$ et que $X_{10}=50$.

PARTIE B:

On considère la fonction s_2 , à valeurs complexes, définie pour tout t de IR par:

$$s_2(t)=e^{-2i\pi ft}$$

On pose f = 2.

Modifier le fichier Xcas et construire le spectre de fréquences obtenu.

Que remarque-t-on?

PARTIE C:

On considère le signal s_3 , à valeurs réelles, définie pour tout t de IR par:

$$s_3(t)=\frac{s_1(t)+s_2(t)}{2}$$

1) Justifier que $s_3(t)=\cos(2\pi ft)$
2) On pose f = 2.
   Modifier le fichier Xcas et construire le spectre de fréquences obtenu.
   Aurait-on pu prévoir le résultat?

Prolongement:

On peut prolonger ce travail mathématique par une étude de la fonction sinus (formule d'Euler)ou en changeant la fréquence f .

Eléments de réponses:

PARTIE A:

2)a)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50

b) $\omega=e^{\frac{2i\pi}{50}}=e^{0,04i\pi}$

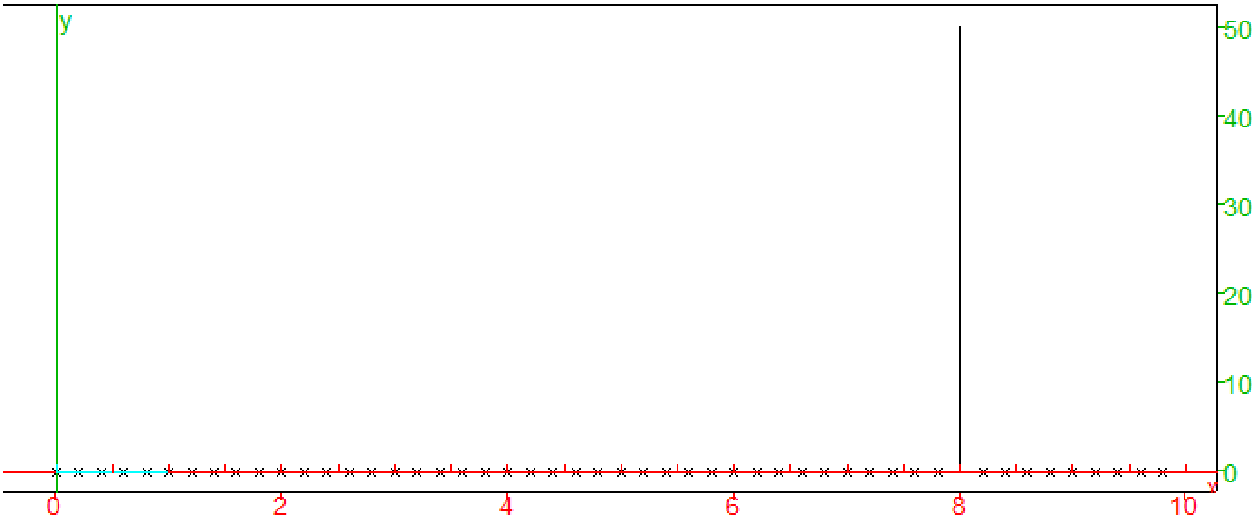
$s(t)=e^{4i\pi t}$ donc $s(k)=e^{4i\pi*k*T_e}$ avec $T_e=\frac{1}{F_e}=0,1$

$s(k)=e^{4i\pi k*0,1}=e^{0,4\,i\pi k}$

$$X_0=\sum_{k=0}^{49}s(k)\omega^{-k*0}=\sum_{k=0}^{49}s(k)=\sum_{k=0}^{49}(e^{0,4i\pi})^k=\frac{1-(e^{0,4i\pi})^{50}}{1-e^{0,4i\pi}}=0 \quad \text{car} \quad (e^{0,4i\pi})^{50}=1$$

On a $\omega=e^{0,04i\pi}$, $s(k)=e^{0,4i\pi k}$ donc $X_{10}=\sum_{k=0}^{49}s(k)\omega^{-10k}=\sum_{k=0}^{49}(e^{0,4\,i\pi k}*e^{-0,4i\pi k})=\sum_{k=0}^{49}(1)=50$

PARTIE B

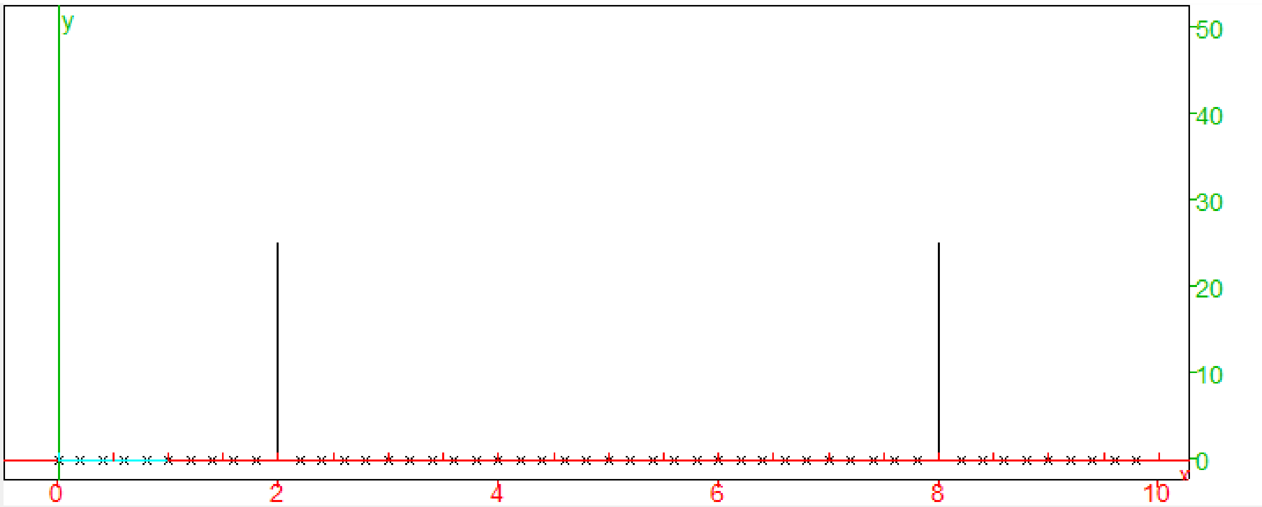


$X_k = X'_{N-k}$

on peut le démontrer en différentiation.

PARTIE C:

C'est la formule d'Euler.



Notions: les notions d'échantillon et de TFD interviennent dans cette fiche.

Activité de l'étudiant: l'étudiant est amené à analyser le graphique proposé, à montrer sa compréhension de ce qu'est un échantillon, à faire le lien avec la formule de TFD vue en classe (alternativement, on peut adapter cette activité pour servir d'introduction à la formule de TFD), à poser des calculs et éventuellement à les mener à bien.

Considérations didactiques: les étudiants peuvent être bloqués sur la détermination de l'échantillon, sur l'application de la formule générale du cours à un cas particulier. La conduite des calculs est technique et peut s'avérer difficilement accessible. Poser au moins le calcul à conduire permet à tous les étudiants de comprendre qu'il y a une justification possible de ce qui est observé et à prendre en main la formule définissant la TFD, qui n'est que peu utilisée dans les autres situations.

Points méthodologiques: des coups de pouce doivent être anticipés(graphique montrant l'échantillonnage du signal: il reste à l'étudiant à trouver la taille de l'échantillon, les différentes valeurs ...; formule de TFD avec la bonne taille d'échantillon).