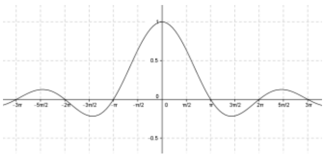
BTS SN – Fonction sinus cardinal



Thème abordé

1. Problématique, situation d'accroche

La fonction sinus cardinal intervient chaque fois que l'on calcule le spectre d'un signal obtenu par troncature (sur un temps d'acquisition limité).

L'objectif, pour cette fiche, est d'étudier quelques propriétés de la fonction sinus cardinal et, en guise d'application, de justifier que la TFD renvoie le spectre de raies d'un signal périodique si celui-ci est observé sur un durée égale à un multiple de sa période (on suppose que la condition de Shannon est réalisée).

2. Frontières de l'étude et prolongements possibles

Dans cette fiche, il s'agit d'étudier une fonction et de réinvestir les notions correspondantes du cours d'analyse. On peut envisager plusieurs prolongement liés au traitement du signal : calcul de la TFD d'une fonction porte ; observation du phénomène d'élargissement des raies ; utilisation de fenêtres de pondération (fenêtre de Hamming par exemple).

Objectifs pédagogiques

1. Discipline impliquée

Mathématiques

2. Prérequis

Des éléments d'analyse concernant l'étude des fonctions ; connaître également les propriétés des fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

3. Capacités et compétences

Chercher, raisonner : mettre en œuvre les techniques vues en cours concernant l'étude des fonctions.

Modéliser : connaître les propriétés importantes de la fonction sinus cardinal, utiles pour le traitement du signal et faire le lien entre ces propriétés et la question de l'échantillonnage pour le calcul de la TFD d'un signal sinusoïdal en particulier.

Outils

Disposer d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur comme Geogebra.

Contenu de la fiche

On considère la fonction sinus cardinal, notée sinc, définie sur **R** par : $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

On étudie cette fonction sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$.

Questions :

1. **a.** Démontrer que la fonction sinc est une fonction paire.

   b. Quelle propriété de symétrie possède la représentation graphique de la fonction sinc ?

On restreint l'intervalle d'étude à $I = [0 ; 3\pi]$.

2. Résoudre l'équation $\operatorname{sinc}(x) = 0$. Interpréter graphiquement.
3. Le but de cette question est d'obtenir par le calcul le tableau de variation de la fonction sinus cardinal.

   On admet que, pour tout réel $x \neq 0$, $\operatorname{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

   On pose $g(x) = x\cos x - \sin x$.

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

   b. Montrer que g s'annule pour deux valeurs strictement positives α et β de l'intervalle I (on prendra $\alpha < \beta$) et donner, par balayage à la calculatrice, un encadrement de α et de β à 10^{-3} près.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction sinc sur l'intervalle I (On admet que la fonction sinc est dérivable en 0, de dérivée nulle en 0).
4. Montrer que l'abscisse α du minimum vérifie : $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\alpha$.

   En utilisant la stricte croissance de la fonction $\cos$ sur l'intervalle $[\pi ; 2\pi]$, donner un encadrement du minimum $\operatorname{sinc}(\alpha)$.

Application à la TFD d'un signal sinusoïdal

On considère le signal défini sur **R** par : $s(t)=\cos(2\pi\times f_0\times t)$. Ce signal a un spectre formée de deux raies aux fréquences $-f_0$ et f_0.

Si l'on fait l'acquisition de ce signal sur une durée T_a, alors le spectre d'amplitude du signal acquis est la somme de deux sinus cardinaux centrés sur les fréquences $-f_0$ et f_0 présentant des valeurs d'annulation en $f_0+\dfrac{k}{T_a}$ ou $-f_0+\dfrac{k}{T_a}$ avec *k* réel .

5. On calcule la TFD d'un échantillon de taille N acquis à la fréquence $f_e=\dfrac{N}{T_a}$.

   On admet que la TFD est un échantillonnage du spectre précédent à la fréquence $\dfrac{1}{T_a}=\dfrac{f_e}{N}$.

   Comment choisir alors T_a pour que la TFD renvoie le spectre exact du signal $s(t)$?

Eléments de réponses :

Pour tout réel non nul, $\dfrac{\sin(-x)}{(-x)}=\dfrac{-\sin x}{(-x)}=\dfrac{\sin x}{x}$.

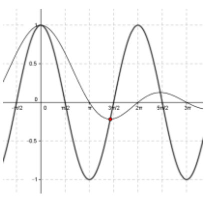
La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La fonction s'annule pour les multiples non nuls de π.

$g(x)=x\cos x-\sin x$ et $g'(x)=-x\sin x$; on en déduit que g est strictement décroissante sur $[0;\pi]$ et sur $[2\pi;3\pi]$ et strictement croissante sur $[\pi;2\pi]$.

Théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule pour une valeur α dans l'intervalle $[\pi;2\pi]$ et une valeur β dans l'intervalle $[2\pi;3\pi]$.

On obtient : $4,493<\alpha<4,494$ et $7,725<\beta<7,726$.



$\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ équivaut à $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\alpha$, ce qui montre que le point de la courbe correspondant au minimum de la fonction sinc s'obtient comme intersection des courbes du sinus cardinal et du cosinus.
La fonction cos est strictement croissante au voisinage de α ,donc :

$\cos(4,493) < \cos\alpha < \cos(4,494)$ soit $-0,217 < \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} < -0,216$.

<u>Application</u> : pour que la fréquence f_0 figure dans l'échantillon donné par la TFD, il faut qu'elle soit un multiple de $\dfrac{1}{T_a} = \dfrac{f_e}{N}$. Il existe alors un entier n tel que $n \times \dfrac{1}{T_a} = f_0$ ou encore $T_a = nT$. Le temps d'acquisition doit être un multiple de la période du signal.

Notions : propriétés des fonctions sinus, cosinus ; dérivation ; théorème des valeurs intermédiaires ; interprétations graphiques.

Activité de l'étudiant : l'étudiant doit faire l'étude de la fonction sinus cardinal et observer certaines propriétés de cette fonction qui pourront être réinvesties en traitement du signal.

Considérations didactiques : L'étude théorique de la fonction doit être complétée par des considérations graphiques. On peut montrer par exemple la courbe représentative de la valeur absolue de la fonction sinus cardinal et faire le lien avec le spectre d'amplitude d'une fonction porte. La question 3 (tableau de variation) peut être traitée uniquement graphiquement au titre de la différenciation.

Points méthodologiques : il peut être intéressant de demander aux étudiants de compléter une fiche synthétique concernant cette fonction, au fur et à mesure de la progression dans l'exercice.