Physique-Chimie

Les incertitudes de mesures

IUT Le Mans ; Département Mesures Physiques

14 juin 2012

Jean-Marc BRETEAU
Sylvie HOULBERT

Anne BOISTEUX

qualifier

Désignation
- d'un objet
- d'un évènement

quantifier

Une grande bouteille, une voiture rapide, un sac très lourd …

Une noix de beurre, un laps de temps, …

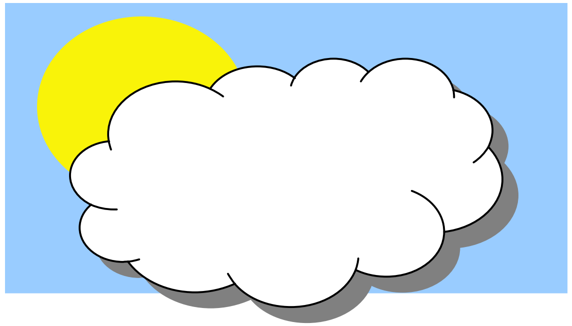
Trois fois rien, un mètre et des poussières,
cinquante et quelque kilomètres, …

INSUFFISANT !!!

préciser les choses → **Mesurer**

Temps

Energie
(gaz, électricité, carburants,…)

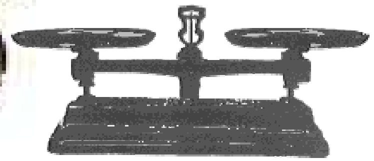


Météo (température, pression, hygrométrie, …

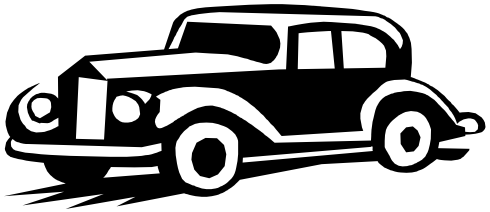
Chaque jour

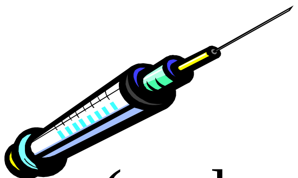
≈ 400 mesures

Automobile (vitesse, kilométrage, niveaux, …)



Transactions commerciales





Médecine
(analyses, dosages des RX, des produits radioactifs, …)

(…)

I- La mesure

Mesurer : C'est comparer une grandeur physique inconnue avec une grandeur de même nature prise comme référence, à l'aide d'un instrument

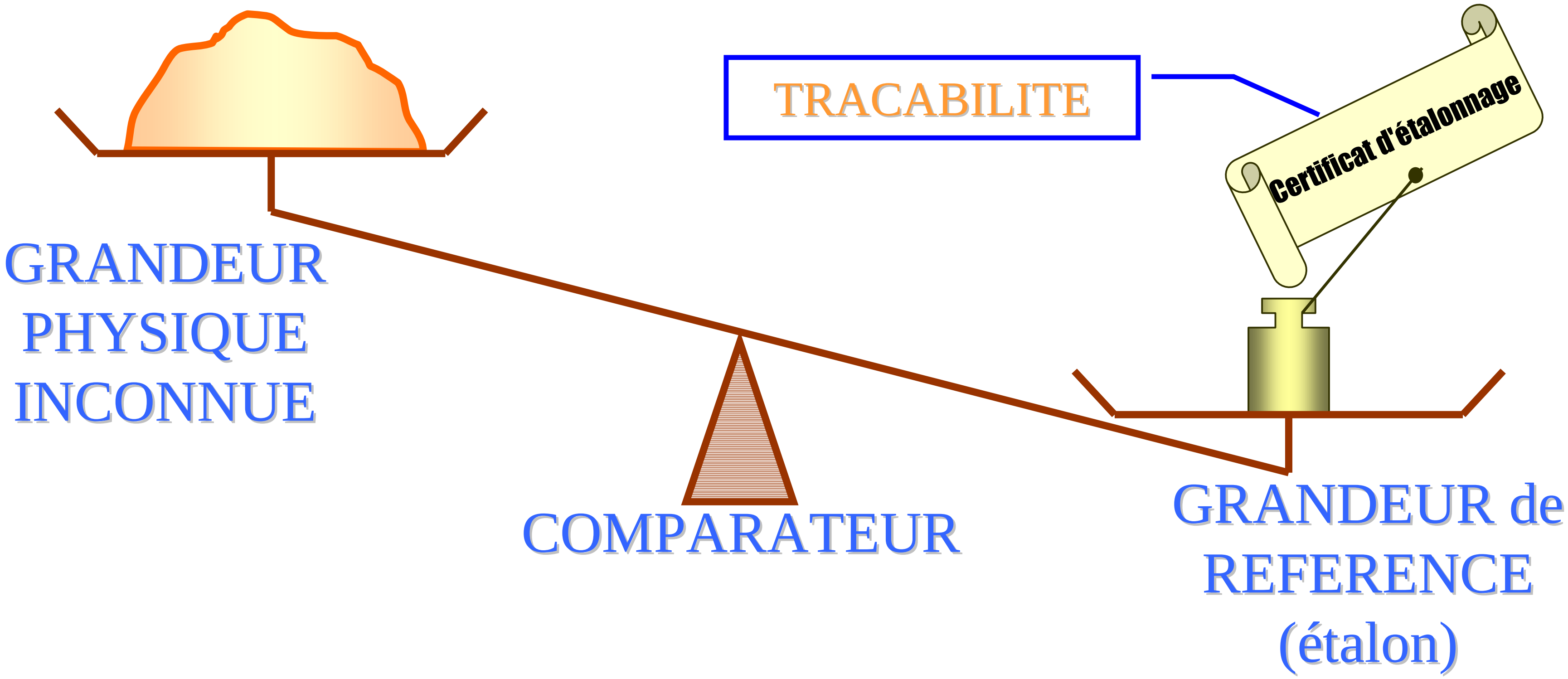
Résultat d'une mesure

$\Downarrow$

Valeur numérique ; unité ; incertitude

Qu'est-ce que MESURER ?

MESURER c'est COMPARER



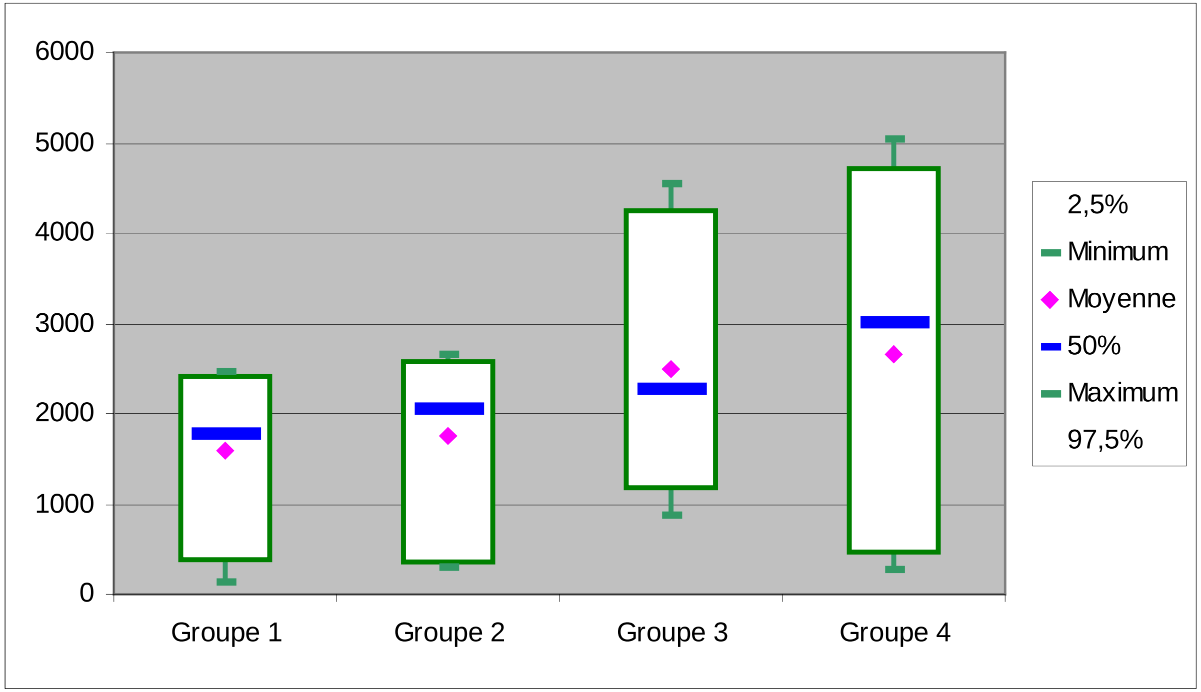
II- La métrologie

***Ensemble des techniques et des savoir-faire qui permettent d'effectuer des mesures et d'avoir une confiance suffisante dans leurs résultats*.**

La mesure est <u>nécessaire</u> à toute connaissance, à toute prise de décision et à toute action.

Pourquoi indiquer une incertitude ?

- **Indication quantitative sur la qualité du résultat permettant d'estimer sa fiabilité.**
- **Sans incertitude, les résultats de mesure ne peuvent plus être comparés**
  - **entre eux,**
  - **par rapport à une valeur indiquée dans une spécification ou une norme.**



III- Les organismes

➢ Métrologie scientifique

4 laboratoires nationaux

LNE

- LNE
- LNE-INM
- LNE-SYRTE
- LNE-LNHB

+ 6 laboratoires associés

➢ Métrologie légale

SDM

Ministère de l'Economie
des Finances et de l'Industrie
Secrétariat d'Etat à l'Industrie
GOUV. FRANCE

Sous **D**irection de la **M**étrologie

Au niveau régional ⇒

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

DRIRE
Directions Régionales de
l'Industrie, de la Recherche
et de l'Environnement

Contrôle réglementaire de certaines opérations de mesurage, de certaines catégories d'instruments de mesure, …

➢ Métrologie industrielle

COFRAC

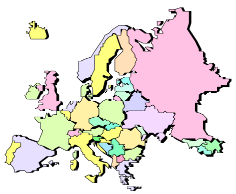
COmité **FR**ançais d'**AC**créditation

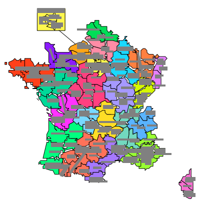
Permet aux laboratoires et aux organismes qu'il accrédite d'apporter la preuve de leur compétence et de leur impartialité

Très impliqué au niveau international :

⇒ Évite aux industriels intervenant à l'exportation d'avoir à subir une multiplication des contrôles

Organisation de la métrologie





scientifique	industrielle	légale	normalisation
BIPM		OIML ILAC	ISO
EUROMET	accréditations EAL	WELMEC	CEN
LNE	COFRAC	SDM	AFNOR

IV- VIM

Vocabulaire **I**nternational des termes fondamentaux et généraux de **M**étrologie

Normes NF X 07-001

Les termes ainsi définis dans ce recueil sont prévus pour s'appliquer aussi bien en *métrologie fondamentale* que pour les *mesures les plus courantes*

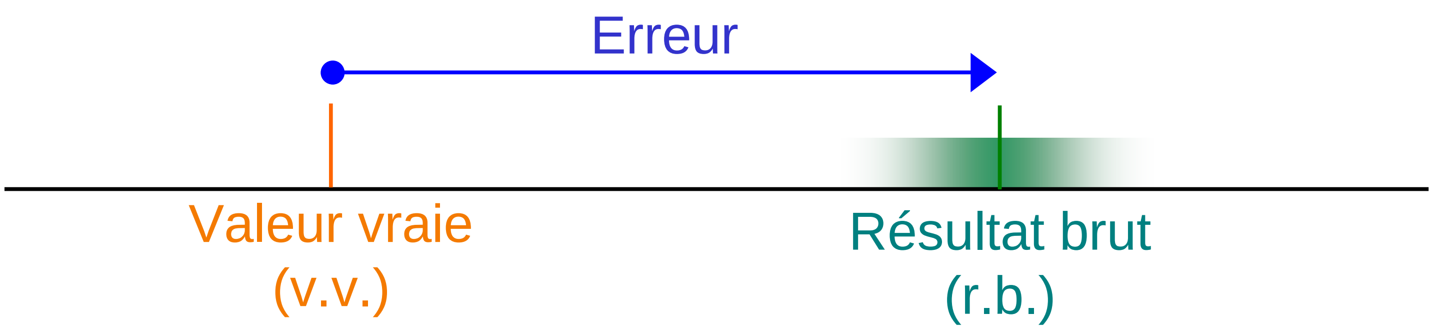
V- Évaluation des incertitudes de mesures

Un CONSTAT

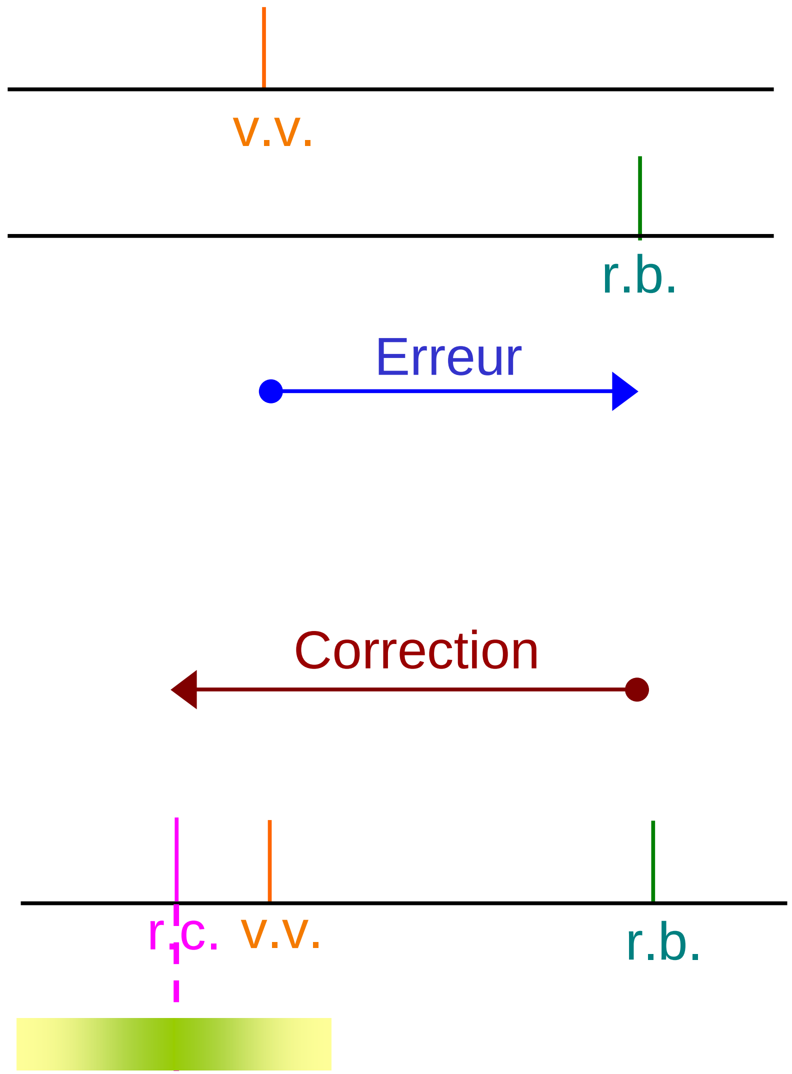
En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes.

Les mesures sont entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon :

- la méthode choisie
- la qualité des instruments
- l'habileté du manipulateur
- ….



Le concept d'incertitude de mesure



Valeur vraie
à jamais inconnue …

Résultat brut
obtenu par un ensemble de mesures

Erreur
composée d'une multitude d'erreurs inconnues et de quelques erreurs « présumées » comme par exemple la justesse

Correction

jamais totalement connue

Résultat corrigé

INCERTITUDE

L'association du résultat corrigé et de l'incertitude constitue le résultat de mesure

Comment évaluer l'incertitude de mesure

Approche ancienne – Méthode des Δ

$$\Delta z = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot \Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \cdot \Delta x_n$$

Δz, Δx_i sont les erreurs (incertitudes ?!) absolues

Inconvénients – limitations de cette approche

- Connaissance implicite absolue de la précision d'une mesure
- Pas de notion de risque statistique
- Majoration de l'incertitude

Exemple : Détermination d'une masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\mathrm{Log}\,\rho = \mathrm{Log}\,m - \mathrm{Log}\,V$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{\cancel{\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}}}$$

Justification mathématique du concept d'incertitude

Développement autour des espérances mathématiques

$$y-\mu_y=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\mu_i)$$

$$\left(y-\mu_y\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\mu_i)\right)^2$$

$$\left(y-\mu_y\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2(x_i-\mu_i)^2+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\mu_i)\left(x_j-\mu_j\right)$$

$$E\left[\left(y-\mu_y\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2E\left[(x_i-\mu_i)^2\right]+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}E\left[(x_i-\mu_i)\left(x_j-\mu_j\right)\right]$$

$$\sigma_y^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$$

avec $\rho_{ij}=\dfrac{\operatorname{cov}(x_i,x_i)}{\sqrt{\sigma_i^2\sigma_j^2}}=\text{Coefficient de corrélation}$

Incertitude type composée

$$\boxed{u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u\left(x_j\right)r\left(x_i,x_j\right)}$$

Application à la mesure de masse volumique

Incertitude type composée

$$u_c^2(\rho) = \frac{u^2(m)}{V^2} + \frac{m^2 u^2(V)}{V^4} - 2\frac{m}{V^3}\, u(m)u(V)r(m,V)$$

$$\left[\frac{u_c(\rho)}{\rho}\right]^2 = \frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(V)}{V^2} - 2\frac{u(m)u(V)r(m,V)}{m \cdot V}$$

$$\text{si } r(m,V) = 0 \Rightarrow \frac{u_c(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(V)}{V}\right]^2}$$

$$\text{si } \left|r(m,V)\right| = 1 \Rightarrow \frac{u_c(\rho)}{\rho} = \frac{u(m)}{m} + \frac{u(V)}{V}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$$

La méthode des Δ repose sur l'hypothèse implicite que les grandeurs d'entrée sont totalement corrélées ce qui est rarement le cas.

Question de notations …

Documents IGEN et ISO

- Notations de type $\Delta \Leftrightarrow$ confusion erreur - incertitude

- Adopter la notation u (incertitude-type) et U (incertitude élargie)

- "u" $\rightarrow$ UNCERTAINTY

Incertitude	Notations MEN	Norme internationale
Incertitude-type	s	u
Incertitude-type élargie ou incertitude de la mesure	ΔM	U
Écart-type expérimental	s_{exp}	u_{exp} ou s_x ou σ_{n-1}
Largeur d'un intervalle	$2.\Delta c$	q=2a

ÉVALUATION des INCERTITUDES

2 approches possibles

NF ENV 13005 - GUM

- Analyse du processus de mesure.
- Modèle mathématique.

- Description complète de la mesure et maîtrise des composantes de l'incertitude.

Quantifier l'effet des grandeurs d'influence.

NF ISO 5725 1 à 6

- Essai de fidélité ou accès à des valeurs de fidélité.
- Méthode de mesure ou d'essai comparable à celle de l'essai de fidélité .

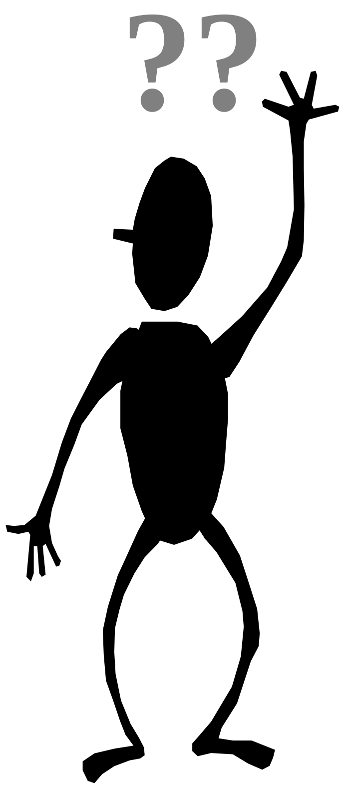
- Solution simple pour les utilisateurs.

Essais interlaboratoires

Un peu de vocabulaire …

Précision

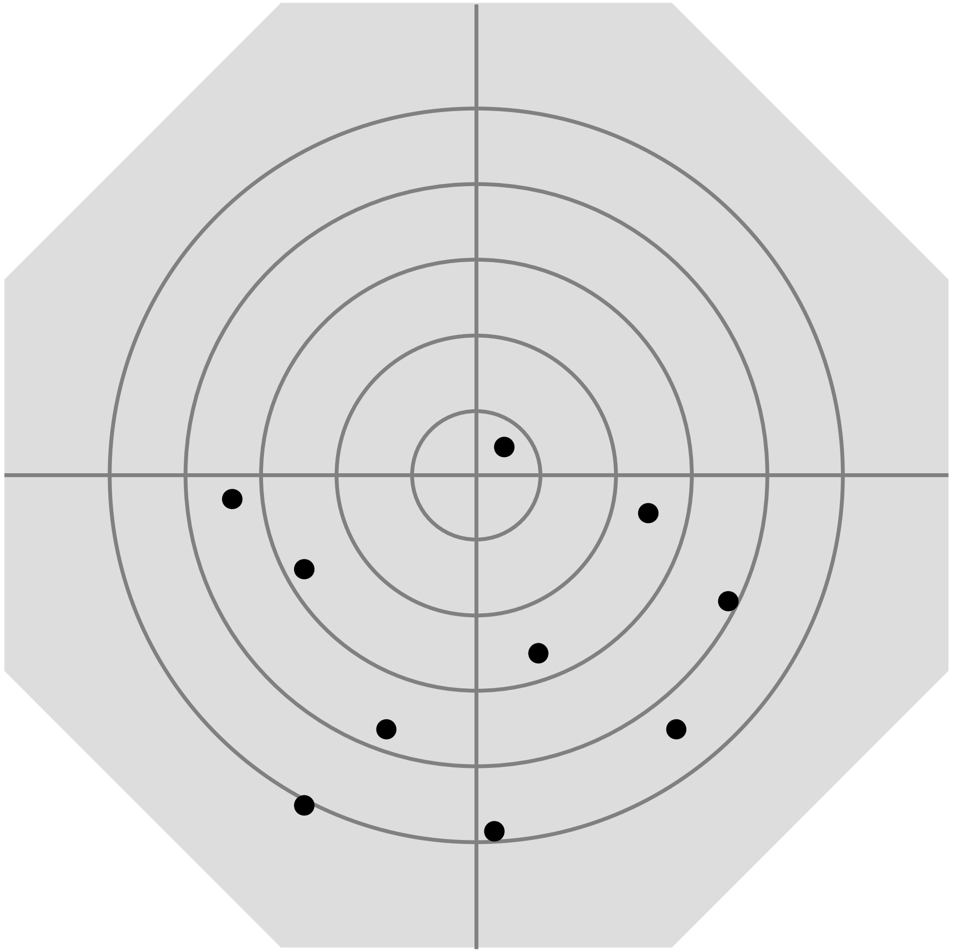
Exactitude



Fidélité

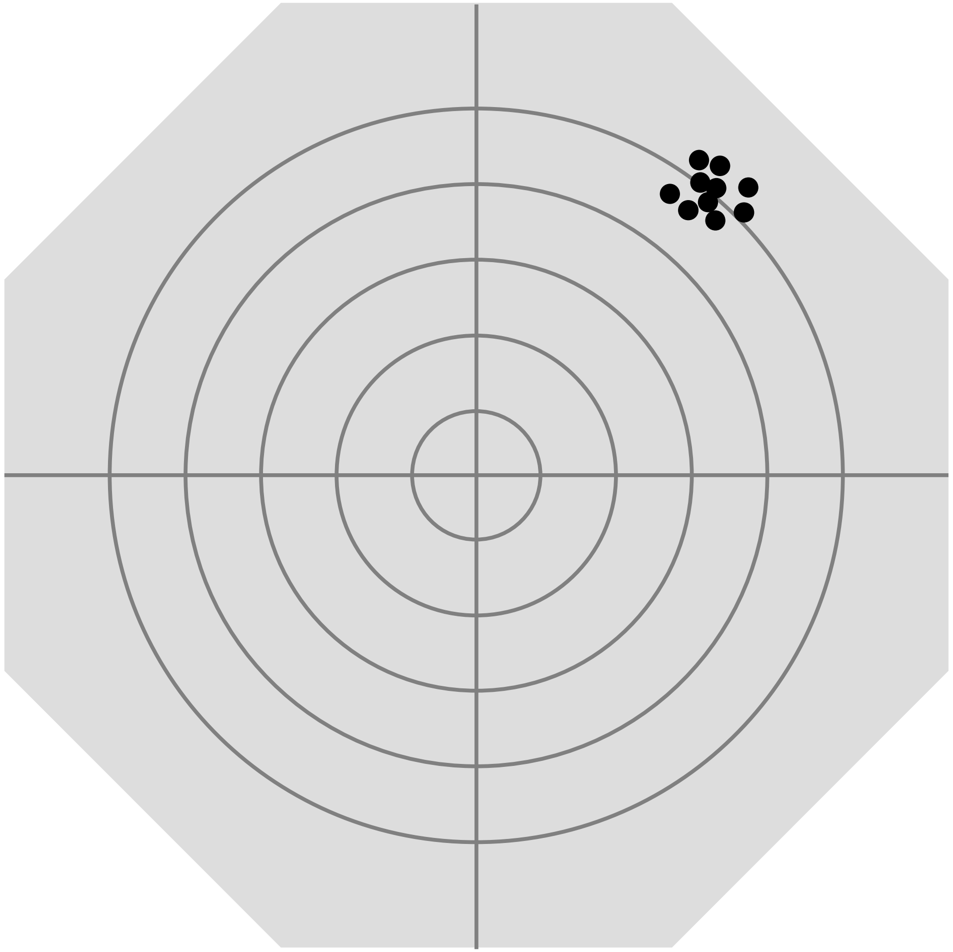
Justesse

Qualité d'une mesure



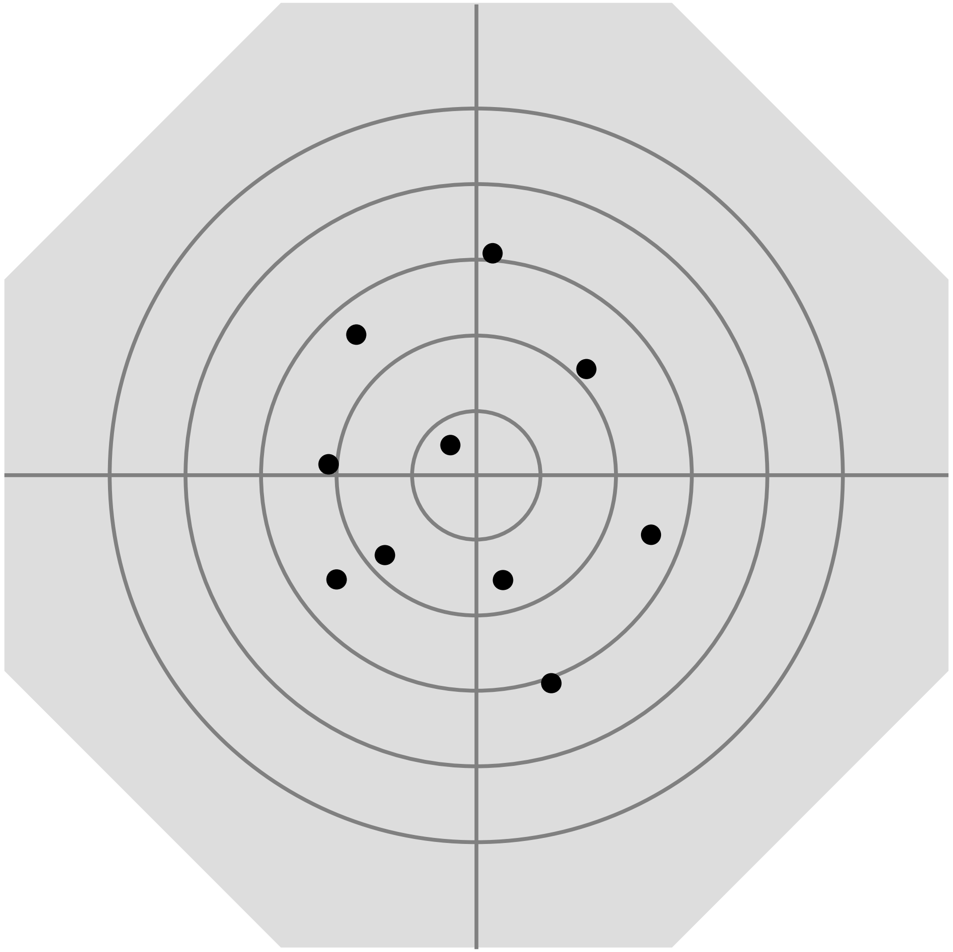
Pas précis (*fidèle*) et pas juste

Qualité d'une mesure



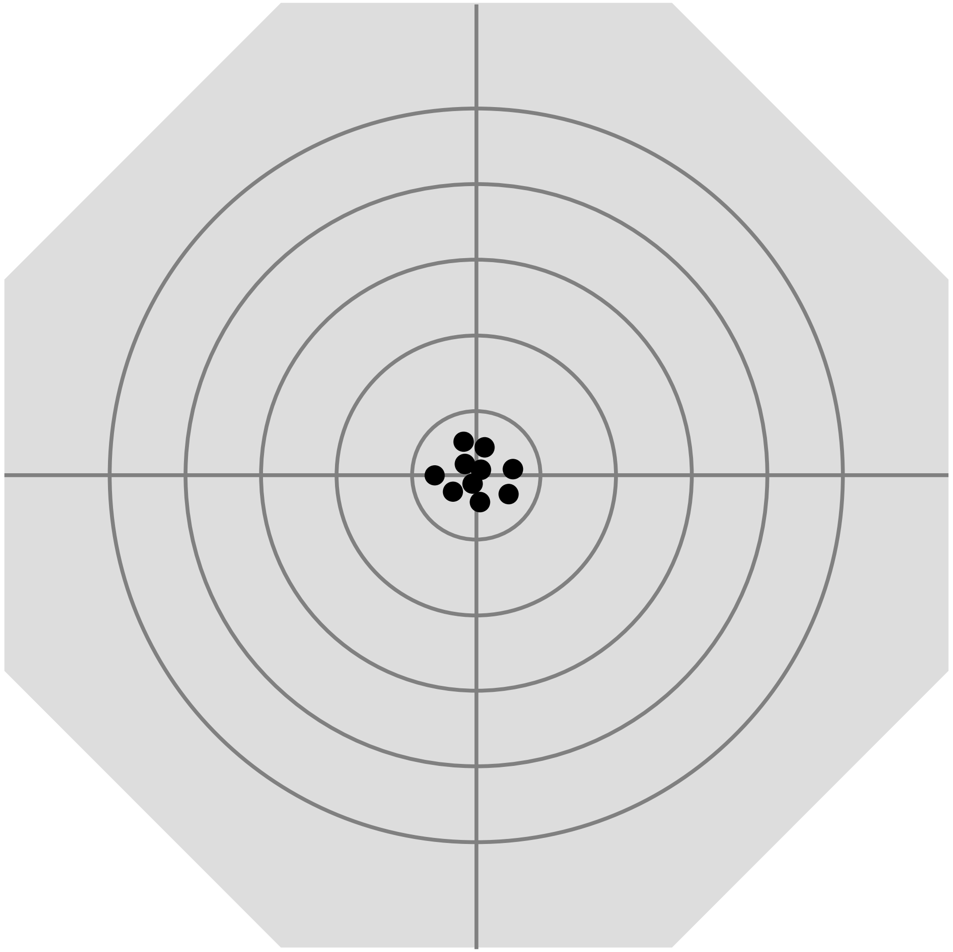
Précis (*fidèle*) mais pas juste

Qualité d'une mesure



Pas précis (*fidèle*) mais juste

Qualité d'une mesure



C'est un beau carton ! ...

Précis (*fidèle*) et juste

TERMINOLOGIE

FIDÉLITÉ ; *Precision*

Qualité d'un appareillage de mesure dont les **erreurs aléatoires sont faibles.**

Résultats de mesurage groupés autour de leur valeur moyenne.

JUSTESSE ; *Trueness*

Qualité d'un appareillage de mesure dont les **erreurs systématiques sont réduites**.

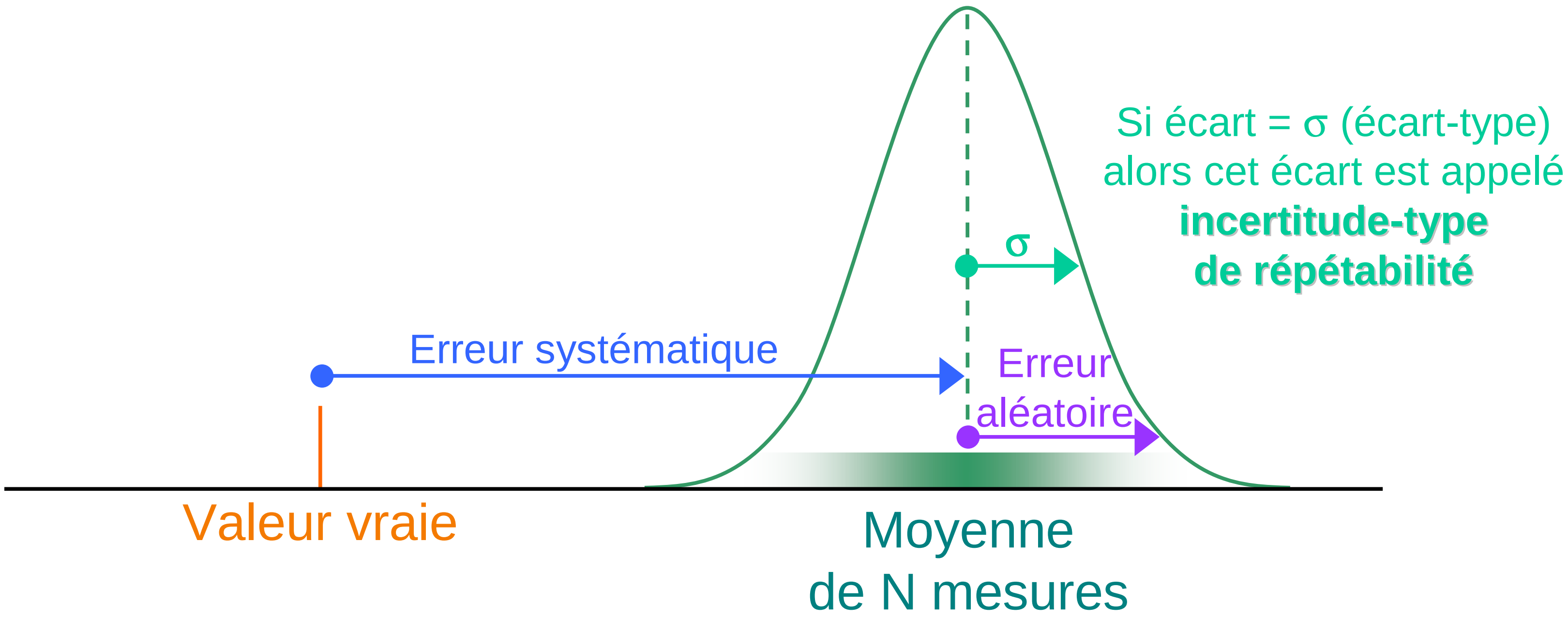
Valeur la plus probable du mesurande très proche de la valeur vraie.

EXACTITUDE ; *Accuracy*

Qualité d'un appareillage qui est **à la fois juste et fidèle** donc exact.

Erreur et incertitude de mesure

Résultat de mesure = valeur vraie + erreur aléatoire + erreur systématique



Erreur systématique (VIM ; §2.17)
" Composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible "

Erreur aléatoire (VIM ; §2.19)
" Composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible"

Exemples d'erreurs systématiques et erreurs aléatoires

Types d'erreurs	Exemples
Erreurs systématiques	- défaut d'étalonnage (du pH-mètre, spectrophotomètre …) - défaut de calibrage, de zéro d'un appareil - erreur de parallaxe dans la lecture d'une indication - erreur de méthode
Erreurs aléatoires	- erreurs de lecture - erreurs dues à l'appareil lui- même - erreurs dues aux conditions extérieures (température, pression atmosphérique, humidité, …)

Objectif de l'expérimentateur = diminuer les erreurs

SYSTEMATIQUES

↓

Application de CORRECTIONS

ALÉATOIRES

↓

RÉPÉTITION des observations

Estimation de l'incertitude de mesure

Une démarche structurée en 4 étapes

Étape 1 : Calcul du résultat de mesure

- Définition du mesurande
- Analyse du processus de mesure
- Modélisation mathématique du processus de mesure

Étape 2 : Calcul des incertitudes-types

- Méthodes d'évaluation de type A et/ou de type B

Étape 3 : Détermination de l'incertitude composée

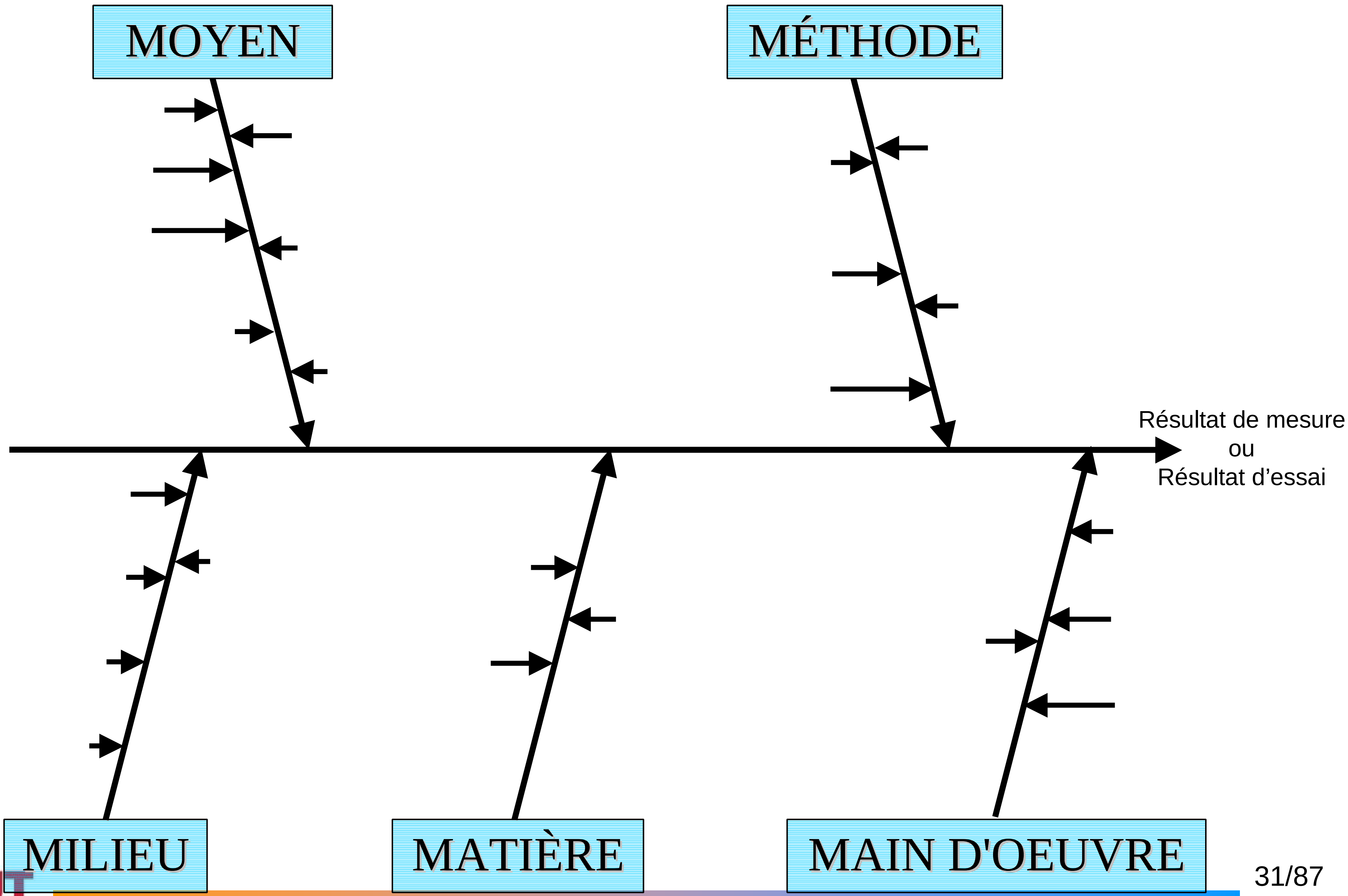
- Loi de propagation des incertitudes

Étape 4 : Détermination de l'incertitude élargie

- Expression du résultat de mesure et de son incertitude

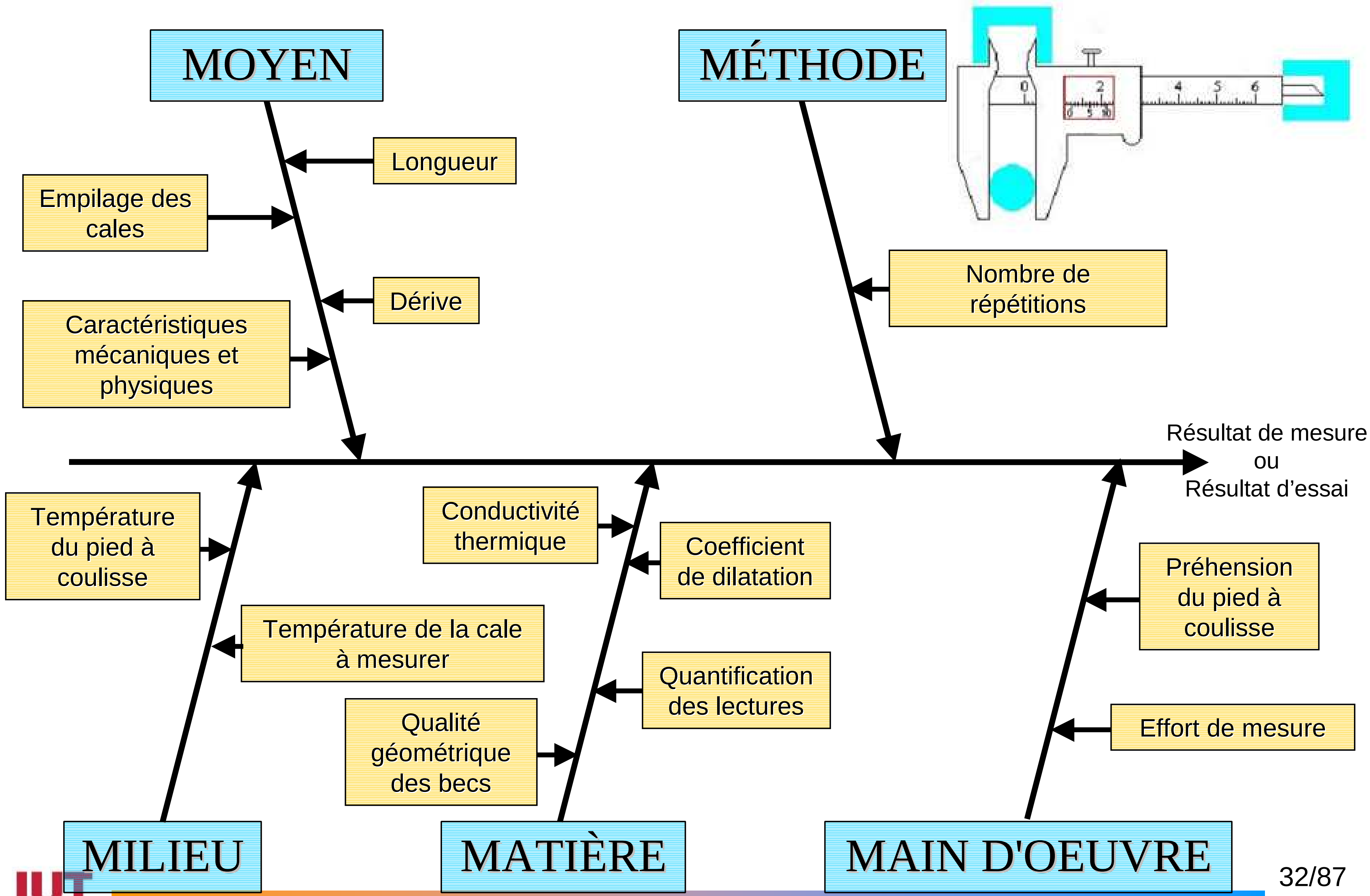
ANALYSE DU PROCESSUS DE MESURE

Règle des 5M ou Diagramme cause-effet



ANALYSE DU PROCESSUS DE MESURE

Cas de l'étalonnage d'un pied à coulisse



MODÉLISATION DE LA MESURE - Approche GUM

- **RELATION MESURANDE "Y" - GRANDEURS D'ENTRÉE "X_i"**

  Y = fonction (observations répétées, observation unique, corrections, constantes physiques, ...)

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots, X_N\right)$$

- **EXEMPLE**
  - **Mesure dimensionnelle + correction additive**

$$y = \overline{x} + C_e + C_a$$

$\overline{x}$: moyenne des résultats bruts

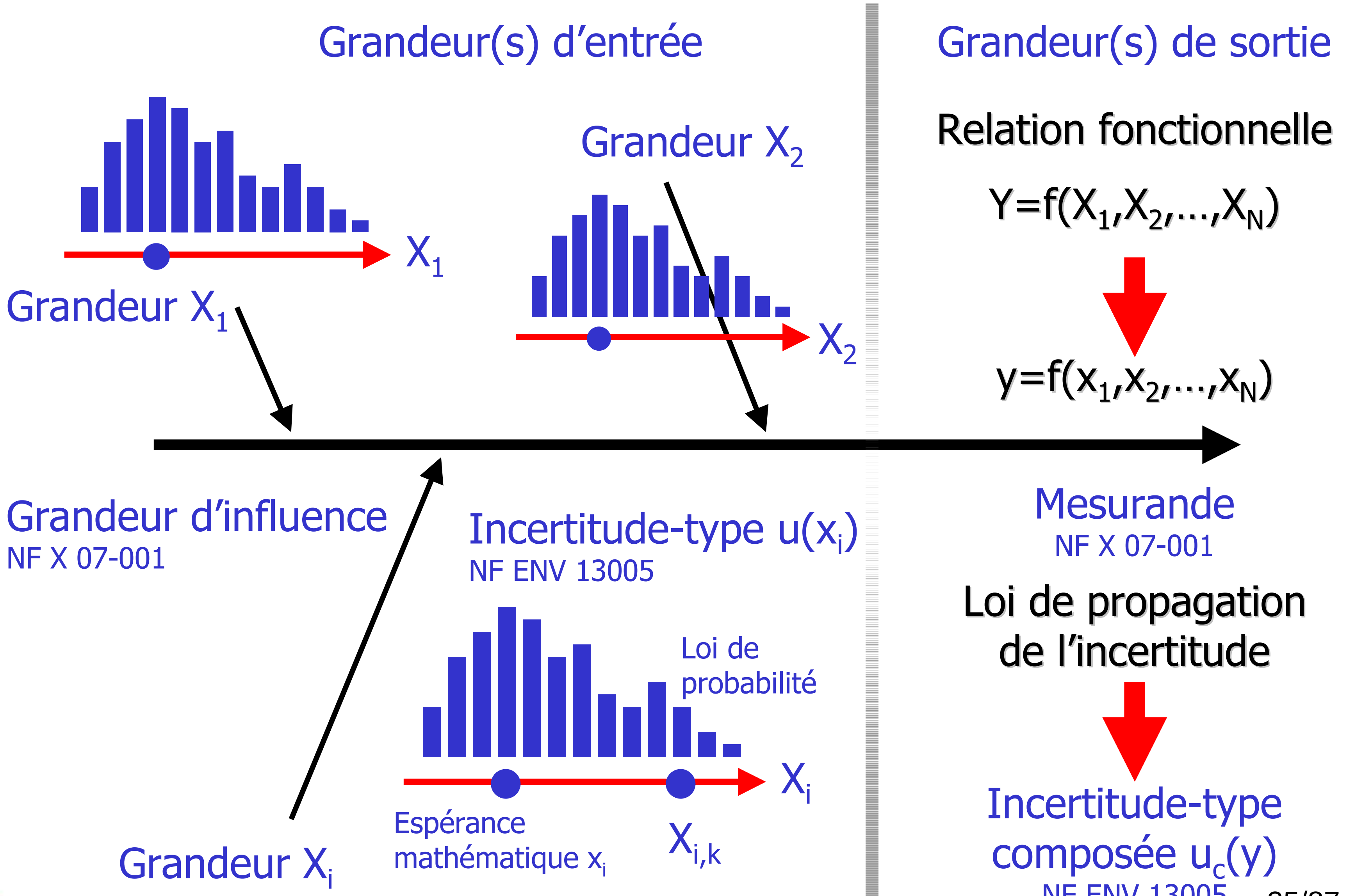
C_e : correction d'étalonnage

C_a : correction d'environnement

Autres modèles mathématiques …

Grandeur évaluée	Modèle mathématique
Masse volumique ρ	$\rho = \dfrac{m}{V}$
Résistance électrique R	$R = \dfrac{U}{I}$
Concentration molaire C	$C = \dfrac{C_1 \cdot V_{1E}}{V}$

PROPAGATION des INCERTITUDES



• ÉVALUATION DES COMPOSANTES DE L'INCERTITUDE

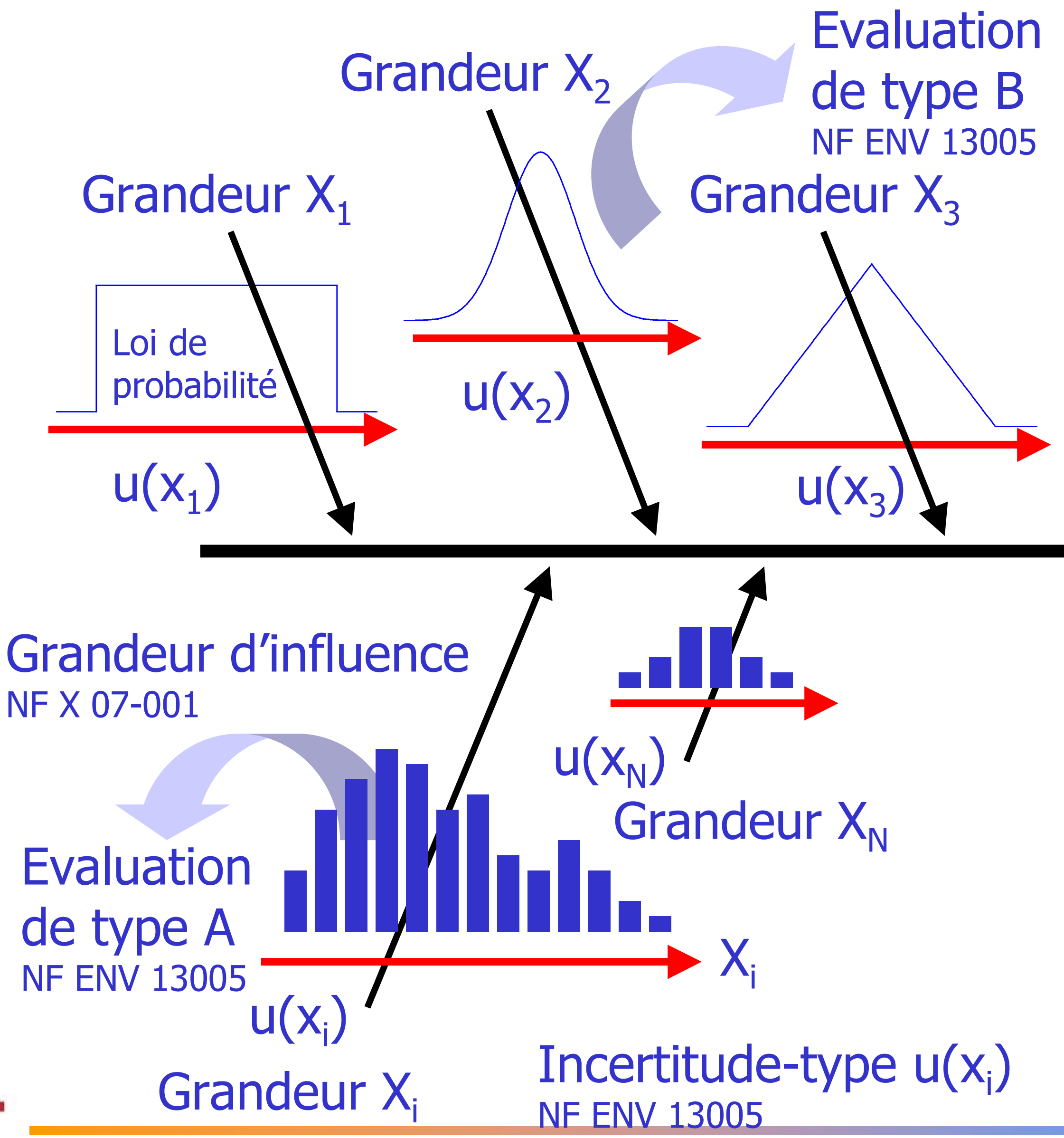
$u(x_i)$

2 méthodes

Méthode de type A | **Méthode de type B**

Traitement statistique | Lois "*a priori*"

MÉTHODES de TYPE A et B



Relation fonctionnelle

$Y=f(X_1,X_2,\ldots,X_N)$

Loi de propagation
de l'incertitude

Incertitude-type
composée $u_c(y)$
NF ENV 13005

Incertitude élargie U
NF ENV 13005

$$U = k \times u_c(y)$$

Facteur d'élargissement
NF ENV 13005

Expression du résultat
d'un mesurage

$$\boxed{Y = y \pm U}$$

INCERTITUDES DE TYPE A

- **Application de méthodes statistiques à une (ou des) série(s) de mesures répétées**
- **Utilisation principale pour quantifier les incertitudes de répétabilité**

Echantillon aléatoire de taille "n"

$$E\left(\bar{x}\right)=\mu$$

$$\sigma^2\left(\bar{x}\right)=\frac{\sigma^2\left(x\right)}{n}$$

Estimateurs de μ et σ

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$s^2\left(x\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \quad \text{et} \quad s^2\left(\bar{x}\right)=\frac{s^2\left(x\right)}{n}$$

INCERTITUDES DE TYPE B

- **Incertitudes sur les corrections d'étalonnage ou d'environnement.**

- **Utilisation lorsqu'on ne peut ou on ne veut pas utiliser les méthodes statistiques.**

- **Fondé sur l'expérience des opérateurs, sur des essais, sur la connaissance des phénomènes physiques.**

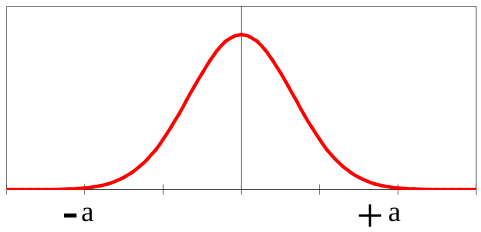
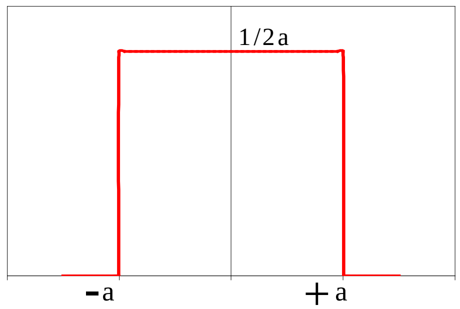
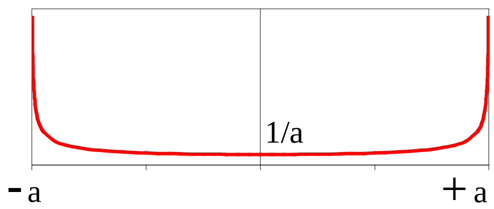
- **Définition *a priori* de l'étendue des valeurs possibles des corrections et de la loi de probabilité**

LOI DE PROBABILITE FONDEE SUR UNE CONNAISSANCE BEAUCOUP PLUS RESTREINTE QUE CE QU 'ON POURRAIT SOUHAITER

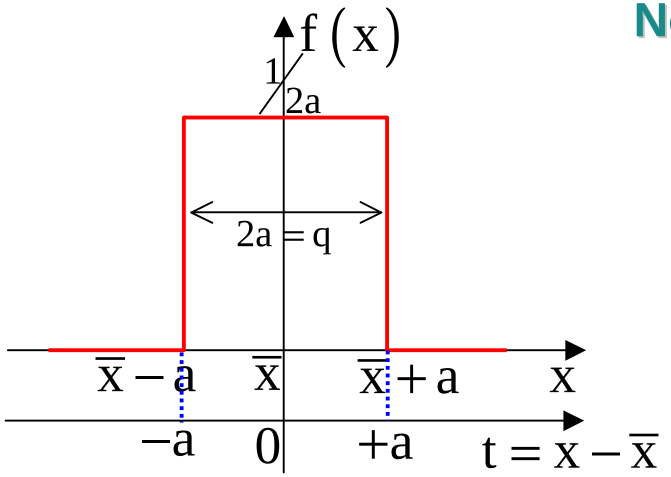
COMME TOUTES LES LOIS DE PROBABILITE ELLE EXPRIME LA CONNAISSANCE DISPONIBLE

LOIS POUR LE TYPE B

- **LOIS DE PROBABILITE USUELLES POUR LA MÉTHODE DE TYPE B**

Moyenne μ = 0 ; étendue 2a			
Lois		**Variance**	**Ecart-type**
Normale a = 3σ 99.73%		$\frac{a^2}{9}$	$\frac{a}{3}$
Uniforme ou rectangle		$\frac{a^2}{3}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$
Dérivée d'arcsinus		$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$

Loi uniforme ou rectangle



Normalisation de la densité de probabilité f(x) ou f(t)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_{-a}^{+a} f_{max}\,dt = 1$$

$$\text{soit } [f_{max} \times 2a] = 1 \Rightarrow f_{max} = \frac{1}{2a}$$

Calcul de la variance var(t)

$$\mathrm{var}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 f(t)\,dt = \int_{-a}^{+a} t^2 \cdot f_{max} \cdot dt$$

$$\text{soit } \frac{1}{2a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{+a} \Rightarrow \mathrm{var}(t) = \frac{a^2}{3}$$

Écart-type s(t)

$$\boxed{s(t) = \sqrt{\mathrm{var}(t)} = u(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{q}{\sqrt{12}}}$$

• QUELQUES CAS D 'APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE TYPE B

Composantes de l'incertitude	Lois de probabilité	Méthode de calcul
Résolution d'un indicateur numérique	Rectangle	si la résolution est "q", on a : $u = \frac{q}{2\sqrt{3}}$
Résolution d'un instrument à graduation	Normale	si la résolution est "q", on a : $u = \frac{q}{6}$
Instrument vérifié et conforme à une classe	Rectangle	si la classe est définie par $\pm$ a, on a : $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Hystérésis	Rectangle	si la différence maximale entre les indications obtenues par valeurs croissantes et décroissantes est "q", on a : $u = \frac{q}{2\sqrt{3}}$
Effet de la température d'un local régulé en température (variation entre T_{max} et T_{min} de façon quasi sinusoïdale)	Dérivée d'arc sinus	si les variations de la température sont $\pm$ b, on a : $u = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Détermination de l'incertitude-type composée

- **Loi de propagation des incertitudes**

Grandeurs d'entrée non corrélées :

indépendantes

Variance composée :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

Incertitude-type composée : $u_c(y)$

Cas particuliers

Le modèle est une somme (ou soustraction) :

$$y = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_N$$

$$\boxed{u_c^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + \ldots + u^2(x_N)}$$

Le modèle est un produit (ou quotient) :

$$y = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_N$$

$$\boxed{\frac{u_c^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + \ldots + \frac{u^2(x_N)}{x_N^2}}$$

Le modèle est une fonction puissance :

$$y = x^n$$

$$\boxed{\frac{u_c^2(y)}{y^2} = n^2 \frac{u^2(x)}{x^2}}$$

Exemple : $y = U = RI$

$$\boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

$$u_c^2(y) = u_c^2(U) = \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)^2 u^2(R) + \left(\frac{\partial U}{\partial I} \right)^2 u^2(I)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = I$$

$$\frac{\partial U}{\partial I} = R$$

$$\boxed{u_c^2(U) = I^2 u^2(R) + R^2 u^2(I)}$$

ou en incertitude relative

$$\boxed{\left[\frac{u_c(U)}{U} \right]^2 = \left[\frac{u(R)}{R} \right]^2 + \left[\frac{u(I)}{I} \right]^2}$$

Détermination de l'incertitude élargie

$$\boxed{U_p = k_p\, u_c(y)}$$

- p indique le niveau de confiance, en général 95%
- k_p est le facteur d'élargissement

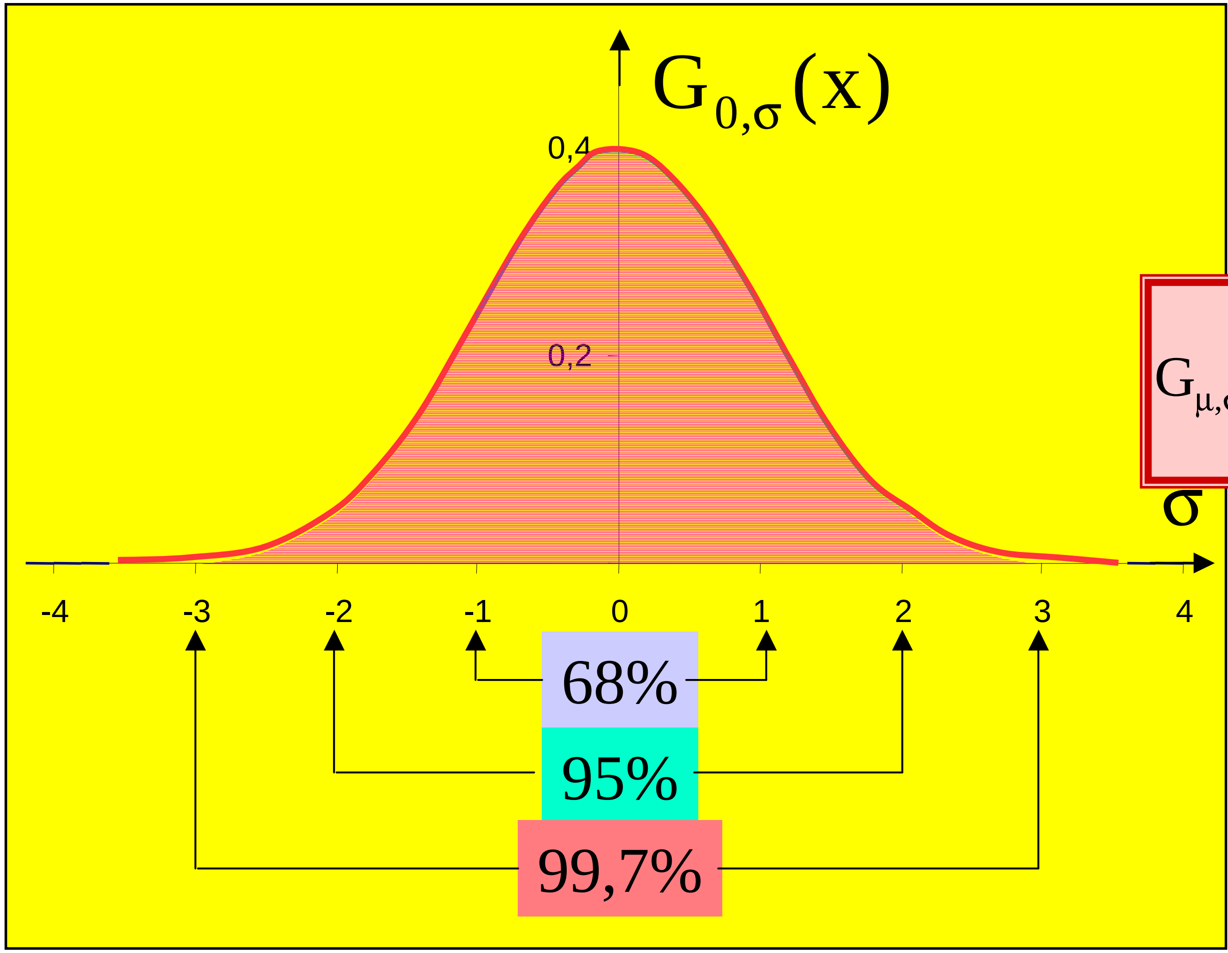
Pour une grandeur décrite par une loi normale :

$k_{68,47\%} = 1$

$k_{95,45\%} = 2$

$k_{99,73\%} = 3$

En général, on prend k = 2, pour un niveau de confiance de l'ordre de 95% ($k_{95\%} = 1{,}96$)



Loi Normale & Intervalle de confiance

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p_\sigma = 68,3\%$$

$$p_{2\sigma} = 95,4\%$$

$$p_{3\sigma} = 99,7\%$$

k = 1 Il y a 68% de chances de trouver la valeur vraie dans cet intervalle

k = 2 Il y a 95% de chances de trouver la valeur vraie dans cet intervalle

k = 3 Il y a 99,7% de chances de trouver la valeur vraie dans cet intervalle

- ## Choix d’un facteur d’élargissement

La valeur du facteur d'élargissement "k" est choisie sur la base du niveau de confiance "p" requis pour l'intervalle y-U à y+U.

Connaissance étendue de la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure "y" et son incertitude-type composée "$u_c(y)$".

Pb : COMMENT ETABLIR LA RELATION ENTRE "k" et "p" ?

<u>Le plus SOUVENT :</u>

Loi de probabilité APPROXIMATIVEMENT normale si :

- Nombre significatifs de grandeurs d'entrée décrites par des lois telles que normales ou rectangulaires.
- Contributions comparables des incertitudes-types $u(x_i)$ à l'incertitude-type composée $u_c(y)$
- Nombre effectif de degrés de liberté élevé (ϑ>10)

On prend alors : k=2 pour p≅95% ; k=3 pour p≅99%

LOI DE STUDENT ou LOI DE "t"

- **Cas d'une grandeur UNIQUE Y=X estimée par "n" observations répétées indépendantes**
  - la meilleure estimation de Y est : $y = \overline{X}$
  - l'écart-type expérimental de cette estimation est : $s\left(\overline{X}\right) = u_c\left(y\right)$
  - si Y suit une loi normale (et comme "n" est limité) alors la variable **$t=(y-Y)/u_c(y)$** suit la loi de "t" telle que :

$$\boxed{\Pr\left[y - t_p(\vartheta)u_c(y) \le Y \le y + t_p(\vartheta)u_c(y)\right] = p = Niveau\ de\ confiance}$$

$$\boxed{U_p = k_p\, u_c(y) = t_p(\nu)\, u_c(y)}$$

- ν =nombre de degrés de liberté
- t_p est le coefficient de Student évalué à l'aide de tables ou avec Excel

Loi.student.inverse(1-p;ν)

Nbre de mesures répétées -1 ϑ	Niveau de confiance p (%)					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
	Valeur de $t_p(\vartheta)$					
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,00	1,645	1,96	2,00	2,576	3,00

Expression d'un résultat de mesure

Un résultat de mesure = 3 éléments indissociables

$$L = 85{,}06 \text{ mm} \pm 0{,}02 \text{ mm}$$

Une valeur numérique : 85,06

Une unité : le millimètre, mm $\Rightarrow$ TRACABILITE

Une incertitude : $U = \pm\, 0{,}02$ mm $\Rightarrow$ CONFIANCE

Combien de chiffres significatifs ??

Les valeurs numériques du mesurande y et de son incertitude-type $u_c(y)$ ou de son incertitude élargie U ne doivent pas être données avec un nombre excessif de chiffres. Il suffit généralement de fournir $u_c(y)$ et U ainsi que les incertitudes-types $u(x_i)$ avec deux chiffres significatifs. Il peut être malgré tout nécessaire de retenir des chiffres supplémentaires pour les $u(x_i)$ afin d'éviter la propagation des erreurs d'arrondi dans les calculs intermédiaires.

Règle à suivre	**Soit l'éclairement** E **affiché par un luxmètre** $E=100{,}23464\ lux$ **avec** $u(E)=0{,}104\ lux$ **ou** $U(E)=0{,}208\ lux$
1/ <u>Nombre de chiffres significatifs de l'incertitude</u> *2 chiffres arrondis au dernier chiffre supérieur*	$\boxed{u(E)=0{,}11\ lux}$ ou $\boxed{U(E)=0{,}21\ lux}$
2/ <u>Nombre de chiffres significatifs du résultat</u> *Les deux derniers chiffres significatifs du résultat correspondent aux deux chiffres significatifs de l'incertitude.* *Le résultat est arrondi à la valeur la plus proche.*	$\boxed{E=100{,}23464\ lux}$ $\boxed{E=100{,}23\ lux}$
3/ <u>Résultat final</u> Incertitude élargie : $\boxed{Y=(\ldots\pm U(Y))}$ *avec un niveau de confiance de 95%* *Ne pas utiliser de puissance de 10*	$\boxed{E=100{,}23\pm0{,}21\ lux\,(k=2)}$ $\cancel{E=100{,}23\pm21\cdot10^{-2}\ lux\,(k=2)}$
4/ <u>Incertitude relative</u> *à mettre sous forme de pourcentage* *(uniquement valable si la grandeur est différente de zéro)*	$\boxed{\frac{u(E)}{E}=0{,}11\%}$ ou $\boxed{\frac{U(E)}{E}=0{,}21\%}$

Arrondissage de la valeur numérique du résultat de mesure

Pour la valeur numérique du résultat *le dernier chiffre à retenir est celui qui a la même position que le deuxième chiffre significatif dans l'expression de l'incertitude*

Exemple : $Y = 125{,}4596 \qquad U = 1{,}2$

$Y = 125{,}\underline{5} \pm 1{,}\underline{2}$

Même nombre de décimales

Expression du résultat de la mesure

Mesurande : $R = 1858,5468\ \Omega$

Incertitude : $u(R) = 14,48\ \Omega$

$$U(R) = 2 \times 14,48\ \Omega = 28,96\ \Omega$$

$$U(R) = 29\ \Omega$$

2 chiffres significatifs maximum !!!

<u>Présentation du résultat de la mesure :</u>

$$\boxed{R = 1859\ \Omega \pm 29\ \Omega}$$

(k = 2)

Indispensable de l'indiquer !!!

FICHE D'INCERTITUDE

FICHE DE DETERMINATION D'INCERTITUDE	Fiche n°
	Date :

Référentiel :

Domaine, unités :

Détermination des incertitudes :

Méthode de type A :

Méthode de type B :

B1 :

B2 :

B3 :

B4 :

B5 :

TABLEAU RECAPITULATIF

INCERTITUDES	I	u_i	u_i^2
Type A			
Type B			
B1			
B2			
B3			
B4			
B5			
Total = u_c^2			

Résultat : Incertitude-type composée u_c

Incertitude élargie $U=\pm k.u_c$; k= ; Niveau de confiance=

U=±

VI- Exemples d'évaluation des incertitudes

1/ Mesures dimensionnelles à l'aide d'un réglet

- Valeur la plus probable ⇒ Moyenne $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- N mesures répétées ⇒ Écart-type expérimental

$$s_{exp}(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \Rightarrow s(\overline{x}) = \frac{s_{exp}(x)}{\sqrt{N}} = u_{rép}$$

- Résolution de la lecture sur l'échelle graduée

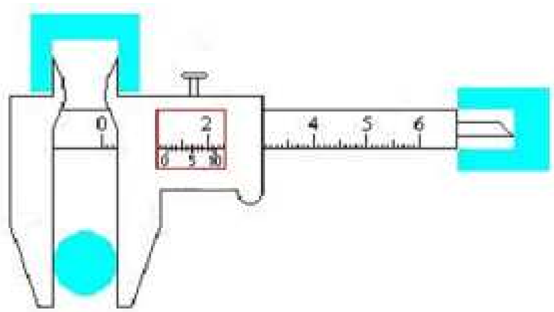
$$u_{rés} = \frac{q}{6} \text{ avec } q = 0,5 \text{ mm}$$

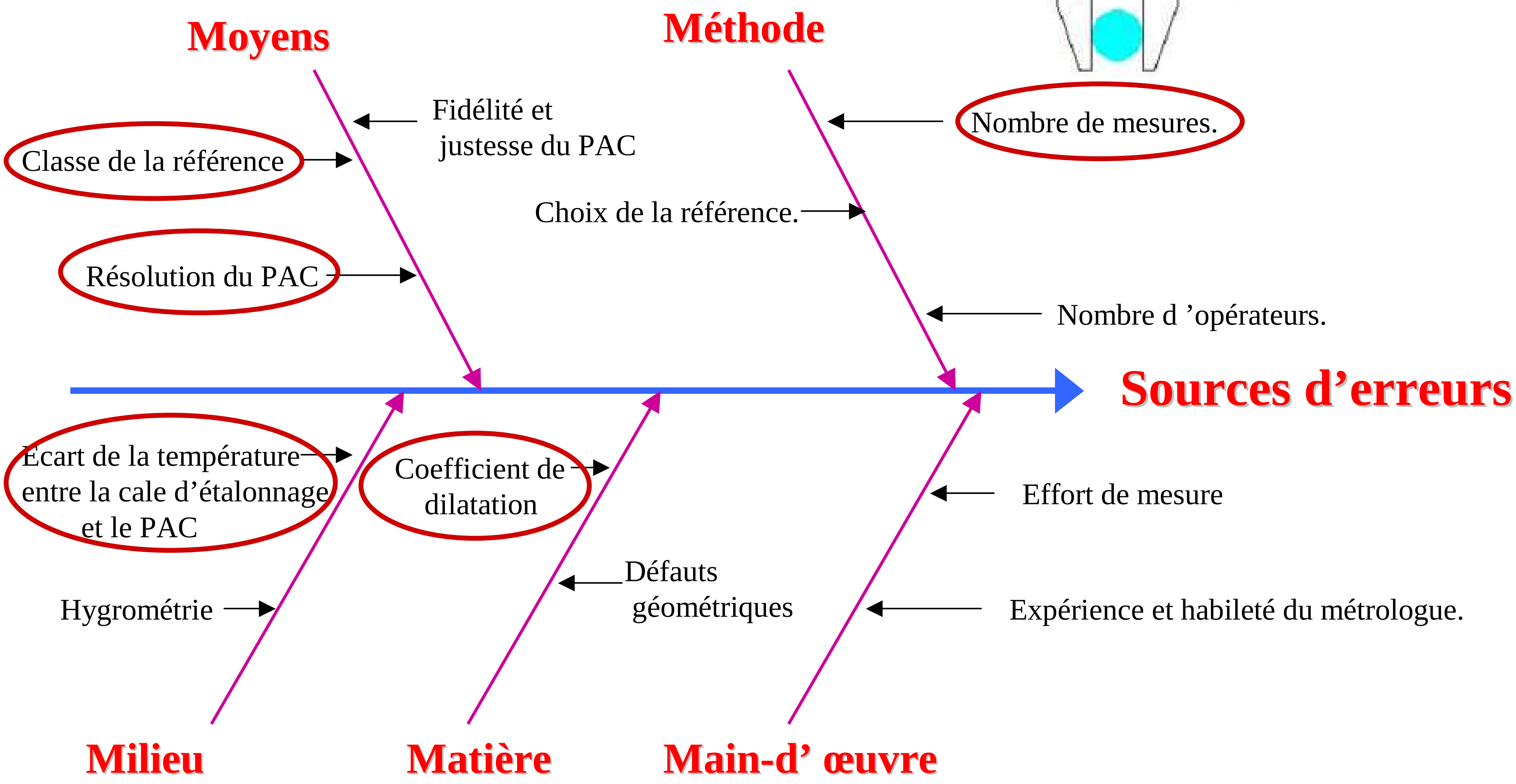
$$u_{rés} = 83\mu m$$

- Incertitude élargie pour une mesure unique $U = 2 \times u_{rés} = 166\mu m$
- Affichage du résultat final $\boxed{L = 17,95 \pm 0,17 mm (k=2)}$

$$\boxed{L = 18,0 \pm 0,2 mm (k=2)}$$

2/ Mesures dimensionnelles à l'aide d'un PAC





Analyse du processus – causes d'incertitude :

- incertitude de répétabilité

- incertitude de justesse sur la cale étalon

  $\rightarrow$ Certificat d'étalonnage

- résolution

- effets de température

Calculs :

- incertitude de répétabilité liée au nombre de mesures

On effectue N=20 mesurages

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L (mm)	24,50	24,48	24,50	24,48	24,48	24,52	24,50	24,48	24,50	24,48
N°	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
L (mm)	24,48	24,48	24,50	24,48	24,46	24,50	24,52	24,48	24,50	24,48

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$s^2(x) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad s(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} = u_{rép}$$

	EXCEL	Calculatrice CASIO	Calculatrice TI
Variance expérimentale	VAR(x_1, x_2, …, x_N)	–	–
Ecart type expérimental	ECARTYPE(x_1,x_2,…, x_N)	σ_{n-1}	S_x

$$\boxed{u_A = u_{rép} = 3,4\ \mu m}$$

• incertitude de justesse de la cale (certificat d'étalonnage)

$a = t_n$ (dans le certificat) = 0,60 µm

(les cales utilisées en TP sont de classe 2)

$$\boxed{u_{B1} = \frac{0,60}{\sqrt{3}} = 0,35\ \mu m}$$

• incertitude liée à la résolution du pied à coulisse

La résolution du pied à coulisse est de 20 µm

$$q = 20\ \mu m \Rightarrow \boxed{u_{B2} = \frac{20}{6} = 3,33\ \mu m}$$

• effets de température $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$

Valeur de la longueur à la température de référence

Variation de longueur due aux effets de température

$$\Delta\ell = \ell_0 \times \alpha \times \Delta\theta$$

$$u_{B3}(\ell) = u(\Delta\ell) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta\ell}{\partial \ell_0}\right)^2 u^2(\ell_0) + \left(\frac{\partial \Delta\ell}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial \Delta\ell}{\partial \Delta\theta}\right)^2 u^2(\Delta\theta)}$$

$$u_{B3}(\ell) = \sqrt{\left(\alpha \times \Delta\theta \times u(\ell_0)\right)^2 + \left(\ell_0 \times \Delta\theta \times u(\alpha)\right)^2 + \left(\ell_0 \times \alpha \times u(\Delta\theta)\right)^2}$$

$\ell_0 = 24,49\,\mathrm{mm}$ $\quad u(\ell_0) = 0,35\,\mu\mathrm{m}$ $\quad \Delta\theta = 2°\mathrm{C}$

$\alpha = 11,5.10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1}$ $\quad u(\alpha) = 0$ $\quad u(\Delta\theta) = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1,414°\mathrm{C}$

$$u_{B3}(L)=\sqrt{\begin{array}{l}\left(11{,}5.10^{-6}\times 2\times 0{,}35.10^{-3}\right)^2+\left(24{,}49\times 2\times 0\right)^2\\+\left(24{,}49\times 11{,}5.10^{-6}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\end{array}}$$

$$u_{B3}(L)=\sqrt{\cancel{6{,}48.10^{-17}}+1{,}586.10^{-7}}=3{,}98.10^{-4}\,\text{mm}=0{,}40\,\mu\text{m}$$

négligeable

$$u_{B3}(\ell)=\ell_0\times\alpha\times u(\Delta\theta)$$

$$\boxed{u_{B3}(L)=0{,}40\,\mu\text{m}}$$

Récapitulatif : $u_A = 3,4 \mu m$

$u_{B1} = 0,35 \mu m$

$u_{B2} = 3,33 \mu m$

$u_{B3} = 0,40 \mu m$

Incertitude de mesure :

Incertitude type composée : $u_c = \sqrt{\sum u_i^2}$

$$u_c = \sqrt{(3,4)^2 + (0,35)^2 + (3,33)^2 + (0,40)^2} = 4,7926 \mu m$$

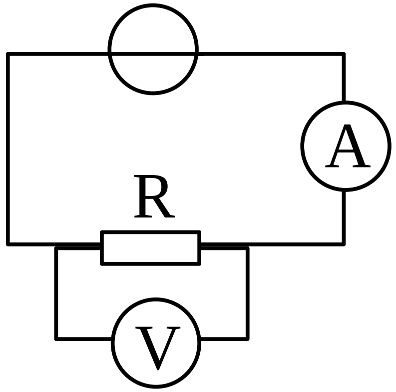
$U = 2 \times 4,7926 = 9,5851 \mu m$ $\boxed{U = 10 \mu m}$

Résultat final : $\boxed{\ell = 24,49 \pm 0,01 \, mm}$ (k = 2)

3/ Mesure d'une résistance électrique

- 3 approches :

- Lecture du code des couleurs
- Directe à l'aide d'un ohmmètre
- Indirecte avec ampèremètre et voltmètre



• Code des couleurs (**R = 80 Ω** ; tolérance ±5%)

$$u_{tol} = \frac{0,05 \times 80}{\sqrt{3}} = 2,3\ \Omega \Rightarrow U = 2 \times u_{tol} = 4,6\ \Omega$$

$$\boxed{R = 80 \pm 5\Omega (k = 2)}$$

• Mesure à l'ohmmètre **R = 81,3 Ω**

• Mesures indirectes :

- V = 2,67 V et I = 0,033 A (calibre 40mA)
  ⇒ **R=80,9 Ω**

- V = 4,67 V et I = 0,06 A (calibre 10A)
  ⇒**R=80,5 Ω**

Analyse du processus – causes d'incertitude :

- incertitude de répétabilité

  → Mesure unique ($u_{rép}=0$)

- incertitude de fidélité du multimètre

  → Documentation technique

- incertitude de résolution

Documentation technique du multimètre FLUKE 79/26 série III

Fonction	Calibre	Précision
$\tilde{V}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	400,0 mV	$\pm(1{,}9\% + 4)$
	4,000 V	$\pm(1{,}9\% + 2)$
	40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(1{,}5\% + 2)$
$\overline{\overline{V}}$	4,000 V, 40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(0{,}3\% + 1)$
$m\overline{\overline{V}}$	40,00 mV	$\pm(0{,}3\% + 5)$
	400,0 mV	$\pm(0{,}3\% + 1)$
Ω	400,0 Ω	$\pm(0{,}4\% + 2)$
	4,000 kΩ, 40,00 kΩ, 4,000 MΩ	$\pm(0{,}4\% + 1)$
	400,0 kΩ	$\pm(0{,}6\% + 1)$
	40,00 MΩ	$\pm(1\% + 3)$

Fonction	Calibre	Résolution	Précision
$\tilde{A}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(1{,}5\% + 4)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(1{,}5\% + 2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(1{,}5\% + 4)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(1{,}5\% + 2)$
$\overline{\overline{A}}$	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(0{,}5\% + 5)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(0{,}5\% + 2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(0{,}5\% + 5)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(0{,}5\% + 2)$

Calculs :

Mesure à l'ohmmètre

- incertitude de fidélité du multimètre

$$u_{fid}(R) = \frac{0,4\% \times 81,3 + 0,2}{\sqrt{3}} = 0,3\Omega$$

- incertitude de résolution

$$u_{rés}(R) = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,06\Omega$$

$$\boxed{u_c = \sqrt{u_{fid}^2 + u_{rés}^2} = 0,305\ \Omega}$$

- expression du résultat final

$$\boxed{R = 81,3 \pm 0,6\ \Omega\ \ (k = 2)}$$

Documentation technique du multimètre FLUKE 79/26 série III

Fonction	Calibre	Précision
$\tilde{V}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	400,0 mV	$\pm(1{,}9\% + 4)$
	4,000 V	$\pm(1{,}9\% + 2)$
	40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(1{,}5\% + 2)$
$\overline{\overline{V}}$	4,000 V, 40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(0{,}3\% + 1)$
$m\overline{\overline{V}}$	40,00 mV	$\pm(0{,}3\% + 5)$
	400,0 mV	$\pm(0{,}3\% + 1)$
Ω	400,0 Ω	$\pm(0{,}4\% + 2)$
	4,000 kΩ, 40,00 kΩ, 4,000 MΩ	$\pm(0{,}4\% + 1)$
	400,0 kΩ	$\pm(0{,}6\% + 1)$
	40,00 MΩ	$\pm(1\% + 3)$

Fonction	Calibre	Résolution	Précision
$\tilde{A}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(1{,}5\% + 4)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(1{,}5\% + 2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(1{,}5\% + 4)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(1{,}5\% + 2)$
$\overline{\overline{A}}$	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(0{,}5\% + 5)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(0{,}5\% + 2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(0{,}5\% + 5)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(0{,}5\% + 2)$

Calculs :

Mesure indirecte avec voltmètre et ampèremètre

V = 4,67 V et I = 0,06 A (calibre 10A)

- incertitudes de fidélité du multimètre

Tension	Courant
$u_{fid}(V) = \dfrac{0,3\% \times 4,67 + 0,01}{\sqrt{3}} = 0,014\,V$	$u_{fid}(I) = \dfrac{0,5\% \times 0,06 + 0,02}{\sqrt{3}} = 0,012\,A$

- incertitudes de résolution

Tension	Courant
$u_{rés}(V) = \dfrac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,006\,V$	$u_{rés}(I) = \dfrac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,006\,A$

- incertitudes combinées $u_c = \sqrt{u_{fid}^2 + u_{rés}^2}$

Tension	Courant
$\dfrac{u_c(V)}{V} = 0,33\%$	$\dfrac{u_c(I)}{I} = 23\%$

Documentation technique du multimètre FLUKE 79/26 série III

Fonction	Calibre	Précision
$\tilde{V}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	400,0 mV	$\pm(1,9\%+4)$
	4,000 V	$\pm(1,9\%+2)$
	40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(1,5\%+2)$
$\overline{\overline{V}}$	4,000 V, 40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(0,3\%+1)$
$m\overline{\overline{V}}$	40,00 mV	$\pm(0,3\%+5)$
	400,0 mV	$\pm(0,3\%+1)$
Ω	400,0 Ω	$\pm(0,4\%+2)$
	4,000 kΩ, 40,00 kΩ, 4,000 MΩ	$\pm(0,4\%+1)$
	400,0 kΩ	$\pm(0,6\%+1)$
	40,00 MΩ	$\pm(1\%+3)$

Fonction	Calibre	Résolution	Précision
$\tilde{A}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(1,5\%+4)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(1,5\%+2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(1,5\%+4)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(1,5\%+2)$
$\overline{\overline{A}}$	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(0,5\%+5)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(0,5\%+2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(0,5\%+5)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(0,5\%+2)$

Calculs :

Mesure indirecte avec voltmètre et ampèremètre

V = 2,68 V et I = 33,12 mA (calibre 40 mA)

- incertitudes de fidélité du multimètre

Tension	Courant
$u_{fid}(V) = \dfrac{0{,}3\% \times 2{,}68 + 0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}0104\,V$	$u_{fid}(I) = \dfrac{0{,}5\% \times 33{,}12 + 0{,}02}{\sqrt{3}} = 0{,}11\,mA$

- incertitudes de résolution

Tension	Courant
$u_{rés}(V) = \dfrac{0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}006\,V$	$u_{rés}(I) = \dfrac{0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}006\text{ mA}$

- incertitudes combinées $u_c = \sqrt{u_{fid}^2 + u_{rés}^2}$

Tension	Courant
$\dfrac{u_c(V)}{V} = 0{,}45\%$	$\dfrac{u_c(I)}{I} = 0{,}3\%$

Documentation technique du multimètre FLUKE 79/26 série III

Fonction	Calibre	Précision
$\tilde{V}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	400,0 mV	$\pm(1,9\% + 4)$
	4,000 V	$\pm(1,9\% + 2)$
	40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(1,5\% + 2)$
$\overline{\overline{V}}$	4,000 V, 40,00 V, 400,0 V, 1000 V	$\pm(0,3\% + 1)$
$m\overline{\overline{V}}$	40,00 mV	$\pm(0,3\% + 5)$
	400,0 mV	$\pm(0,3\% + 1)$
Ω	400,0 Ω	$\pm(0,4\% + 2)$
	4,000 kΩ, 40,00 kΩ, 4,000 MΩ	$\pm(0,4\% + 1)$
	400,0 kΩ	$\pm(0,6\% + 1)$
	40,00 MΩ	$\pm(1\% + 3)$

Fonction	Calibre	Résolution	Précision
$\tilde{A}$ (45 Hz t/m 1 kHz)	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(1,5\% + 4)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(1,5\% + 2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(1,5\% + 4)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(1,5\% + 2)$
$\overline{\overline{A}}$	4,000 mA	0,001 mA	$\pm(0,5\% + 5)$
	40,00 mA	0,01 mA	$\pm(0,5\% + 2)$
	4 A	0,001 A	$\pm(0,5\% + 5)$
	10,00 A	0,01 A	$\pm(0,5\% + 2)$

• expression du résultat final

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left[\frac{u_c(V)}{V}\right]^2 + \left[\frac{u_c(I)}{I}\right]^2}$$

V = 4,67 V et I = 0,06 A (calibre 10A)	V = 2,68 V et I = 33,12 mA (calibre 40 mA)
$\frac{u(R)}{R} = 23\%$	$\frac{u(R)}{R} = 0,54\%$
$R = 77,8\ \Omega$	$R = 80,9\ \Omega$
$u(R) = 18\Omega \Rightarrow U(R) = 36\Omega$	$u(R) = 0,44\Omega \Rightarrow U(R) = 0,88\Omega$
$\boxed{R = 78 \pm 36\ \Omega\ \ (k=2)}$	$\boxed{R = 81,0 \pm 0,9\ \Omega\ \ (k=2)}$

4/ Mesure d'une température

2 types de thermomètre :

- Thermomètre numérique
- Thermomètre à graduations

	Numérique	Graduations
Résolution	q=0,1 °C	q=0,5 °C
$u_{rés}$	$q/2\sqrt{3} = 0{,}03°C$	$q/6 = 0{,}083°C$
$U = 2 \times u_{rés}$	0,06°C	0,17°C
Résultat final	$T = 23{,}9 \pm 0{,}1\ °C\ \ (k=2)$	$T = 23{,}9 \pm 0{,}2\ °C\ \ (k=2)$

5/ Détermination d'une masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \boxed{\frac{u(\rho)}{\rho} = \sqrt{\frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(V)}{V^2}}}$$

- incertitude sur "m"

Elève	Mesure de la masse m (en g)
Aurélien	99.38
Damien	99.82
Nicolas	99.78
Rodolphe	100.28
Ophélie	99.04
Guillaume	99.78
Julie	98.26
Manon	99.31
Romane	99.72

Répétabilité (approchée)

Valeur moyenne	99.4856
Nbre mesures N	9
s_{exp}	0.5824
$u_{rép}$	0.1941

$$u_{rép} = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$$

Résolution

- Affichage numérique au 1/100 de g = q $\Rightarrow$ $u_{rés} = \dfrac{q}{2\sqrt{3}} = 0{,}003\ \text{g}$

$$\boxed{u(m) = \sqrt{u_{rép}^2 + u_{rés}^2} = 0{,}1941\ \text{g}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{u(m)}{m} = 0{,}2\ \%}$$

• incertitude sur "V"

Fiole jaugée de 100 ml

Elève	Mesure du volume V (en cm^{-3})
Aurélien	100.0
Damien	100.0
Nicolas	100.0
Rodolphe	100.0
Ophélie	100.0
Guillaume	100.0
Julie	100.0
Manon	100.0
Romane	100.0

Répétabilité (approchée)

Valeur moyenne	100.0000
Nbre mesures N	9
s_{exp}	0
$u_{rép}$	0

$$u_{rép} = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$$

Résolution

➢ Intervalle de tolérance = ± 0,1ml = ± a

$$\Rightarrow \; u_{rés} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}058 \text{ ml}$$

$$\boxed{u(V) = \sqrt{u_{rép}^2 + u_{rés}^2} = 0{,}058 \text{ ml}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{u(V)}{V} = 0{,}06\ \%}$$

- incertitude sur "ρ"

$$\boxed{\frac{u(\rho)}{\rho}=0,21\%} \quad \text{avec} \;\; \rho = 0,9949\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

$$\Rightarrow u(\rho) = 0,0021\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

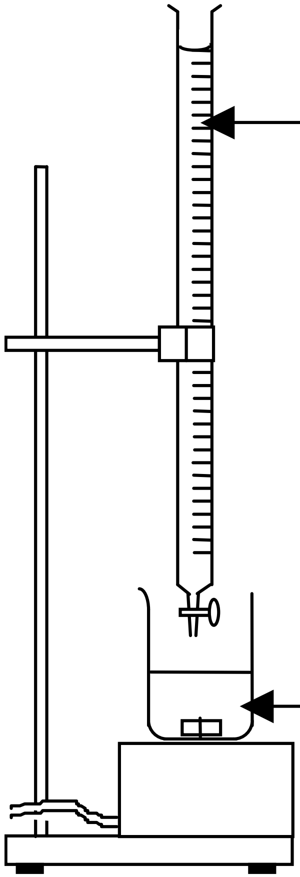
$$\text{et} \quad U(\rho) = 2\times u(\rho) = 0,0042\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

- Résultat final

$$\boxed{\rho = 0,995 \pm 0,004\ \ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}\ \ (k=2)}$$

6/ Incertitudes de mesure lors d'un titrage

- Détermination de la concentration molaire C des ions HCO_3^- (aq) dans l'eau de Contrex par un titrage colorimétrique.

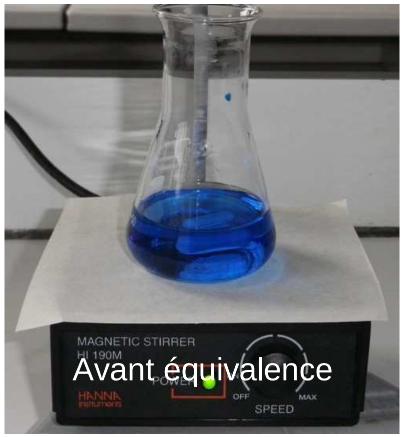


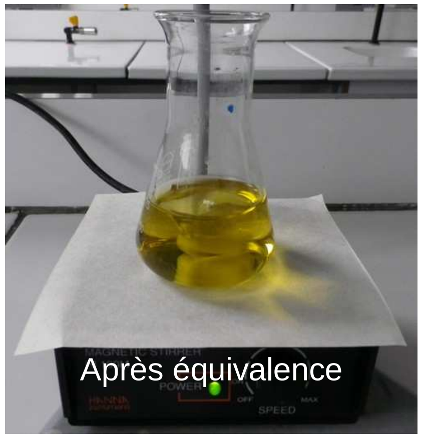
Burette graduée de 25 mL contenant la solution titrante :
Solution d'acide chlorhydrique
$C_1 = 2{,}0.10^{-2}$ mol.L^{-1}

$$C = \frac{C_1 \cdot V_{1E}}{V}$$

$$\frac{u(C)}{C} = \sqrt{\left[\frac{u_c(C_1)}{C_1}\right]^2 + \left[\frac{u_c(V_{1E})}{V_{1E}}\right]^2 + \left[\frac{u_c(V)}{V}\right]^2}$$

Bécher contenant :
V = 50,0 mL d'eau
+ 10 gouttes de vert de bromocrésol





• incertitude sur "C_1"

➢ Solution titrante d'acide chlorhydrique à $C_1 = 2{,}0.10^{-2}$ mol.L^{-1}, préparée par dilution à 500mL, à partir d'une solution mère d'acide chlorhydrique commerciale à $C_{mère} = 1$ mol.L^{-1}

$$C_1 = \frac{C_{mère} \cdot V_{mère}}{V_{eau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(C_1)}{C_1} = \sqrt{\left[\frac{u_c(C_{mère})}{C_{mère}}\right]^2 + \left[\frac{u_c(V_{mère})}{V_{mère}}\right]^2 + \left[\frac{u_c(V_{eau})}{V_{eau}}\right]^2}$$

Sources d'incertitudes	Intervalle de variation	Valeur de l'incertitude
Solution mère d'acide chlorhydrique commerciale	Classe 1N = 99,9% pur $\Rightarrow$ 0,1% d'écart à 100% (1 mol.L^{-1}) $\Rightarrow$ q=10^{-3} mol.L^{-1}	$u(C_{mère}) = \frac{q}{2\sqrt{3}} = 0{,}0003 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ $\frac{u(C_{mère})}{C_{mère}} = 0{,}03\%$
Tolérance de la fiole jaugée de 500 mL (classe A)	$\Delta c = \pm 0{,}25$ mL $= \pm$ a	$u(V_{eau}) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}144 \text{ mL}$ $V_{eau} = 500 \text{ mL} \Rightarrow \frac{u(V_{eau})}{V_{eau}} = 0{,}03\%$
Tolérance de la pipette jaugée de 10 mL (classe A)	$\Delta c = \pm 0{,}025$ mL $= \pm$ a	$u(V_{mère}) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}014 \text{ mL}$ $V_{mère} = 10 \text{ mL} \Rightarrow \frac{u(V_{mère})}{V_{mère}} = 0{,}14\%$

$$\boxed{\frac{u(C_1)}{C_1} = 0{,}15\ \%}$$

• incertitude sur "V_{1E}"

Sources d'incertitudes	Intervalle de variation	Valeur de l'incertitude
Tolérance de la burette	$\Delta c = \pm 0{,}05$ mL$= \pm$ a	$u_{burette} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}029$ mL
Dilatation thermique du liquide	Négligeable entre 16°C et 24°C	$u_{dilat} \simeq 0$ mL
Résolution de la burette (lecture de la graduation)	$\Delta c = 0{,}1$ mL $=$ q Double lecture (zéro et V_{1E})	Pour une simple lecture $u_{rés\ bur} = \frac{q}{6} = 0{,}017$ mL Pour une double lecture $u_{rés2} = \sqrt{u^2_{rés bur} + u^2_{rés bur}}$ $u_{rés2} = \frac{\sqrt{2} \cdot q}{6} = 0{,}024$ mL
Répétabilité approchée (reproductibilité)	Écart type expérimental s_{exp} ou σ_{n-1} Incertitude type de répétabilité $u_{rép} = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$ (N : nombre de mesures : N = 10)	$s_{exp} = 0{,}368$ mL $u_{rép} = \frac{s_{exp}}{\sqrt{10}} = 0{,}1164$ mL

Elève	V_{1E} (en mL)
Aurélien	15.1
Damien	15.9
Nicolas	15.3
Anais	15.2
Rodolphe	15.2
Ophélie	15.5
Guillaume	15.2
Julie	15.3
Manon	14.7
Romane	14.6
V_{1E} moyen (en mL)	15.2

$$u(V_{1E}) = \sqrt{u^2_{burette} + u^2_{rés2} + u^2_{rép}} = 0{,}122 \text{ mL}$$

$$\boxed{\frac{u(V_{1E})}{V_{1E}} = 0{,}80\ \%}$$

• incertitude sur "V"

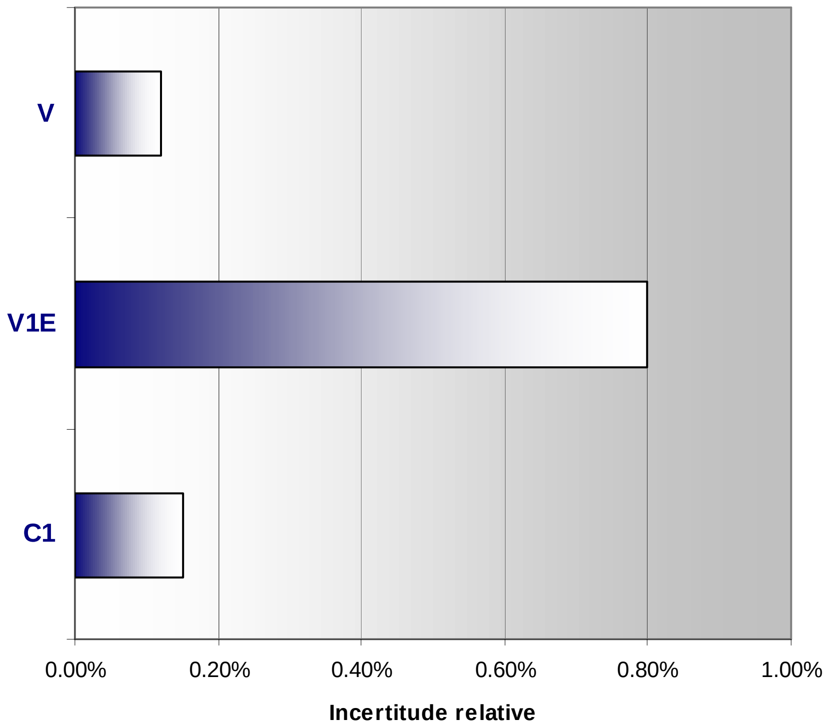
Sources d'incertitudes	Intervalle de variation	Valeur de l'incertitude
Tolérance de la fiole jaugée	$\Delta c = \pm 0{,}10$ mL$= \pm a$	$u_{fiole} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}058 \text{ mL}$
Dilatation thermique du liquide	Négligeable entre 16°C et 24°C	$u_{dilat} \simeq 0 \text{ mL}$
Repérage du niveau de remplissage de la fiole jaugée	*On considère que l'expérimentateur sait ajuster au trait de jauge*	$u_{jauge} \simeq 0 \text{ mL}$

$$u(V) = \sqrt{u_{fiole}^2 + u_{dilat}^2 + u_{jauge}^2} = 0{,}058 \text{ mL}$$

$$V = 50 \text{ mL} \Rightarrow \boxed{\frac{u(V)}{V} = 0{,}12\ \%}$$

• incertitude combinée sur "C"

$$\frac{u(C)}{C}=\sqrt{\left[\frac{u_c(C_1)}{C_1}\right]^2+\left[\frac{u_c(V_{1E})}{V_{1E}}\right]^2+\left[\frac{u_c(V)}{V}\right]^2} \Rightarrow \boxed{\frac{u(C)}{C}=0,82\ \%}$$



Elève	Calcul de C ($mol.L^{-1}$)
Aurélien	6.04
Damien	6.36
Nicolas	6.12
Anais	6.08
Rodolphe	6.08
Ophélie	6.20
Guillaume	6.08
Julie	6.12
Manon	5.88
Romane	5.84
C moyen (en $mol.L^{-1}$)	6.08

$$u(C)=0,05\ mol\cdot L^{-1}$$

$$\boxed{C=6,08\pm0,11\ mol\cdot L^{-1}\ \ (t=2,26)}$$

• Facteur d'élargissement pour U(C)

Nbre de mesures répétées -1 ϑ	Niveau de confiance p (%)					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
	Valeur de $t_p(\vartheta)$					
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,00	1,645	1,96	2,00	2,576	3,00

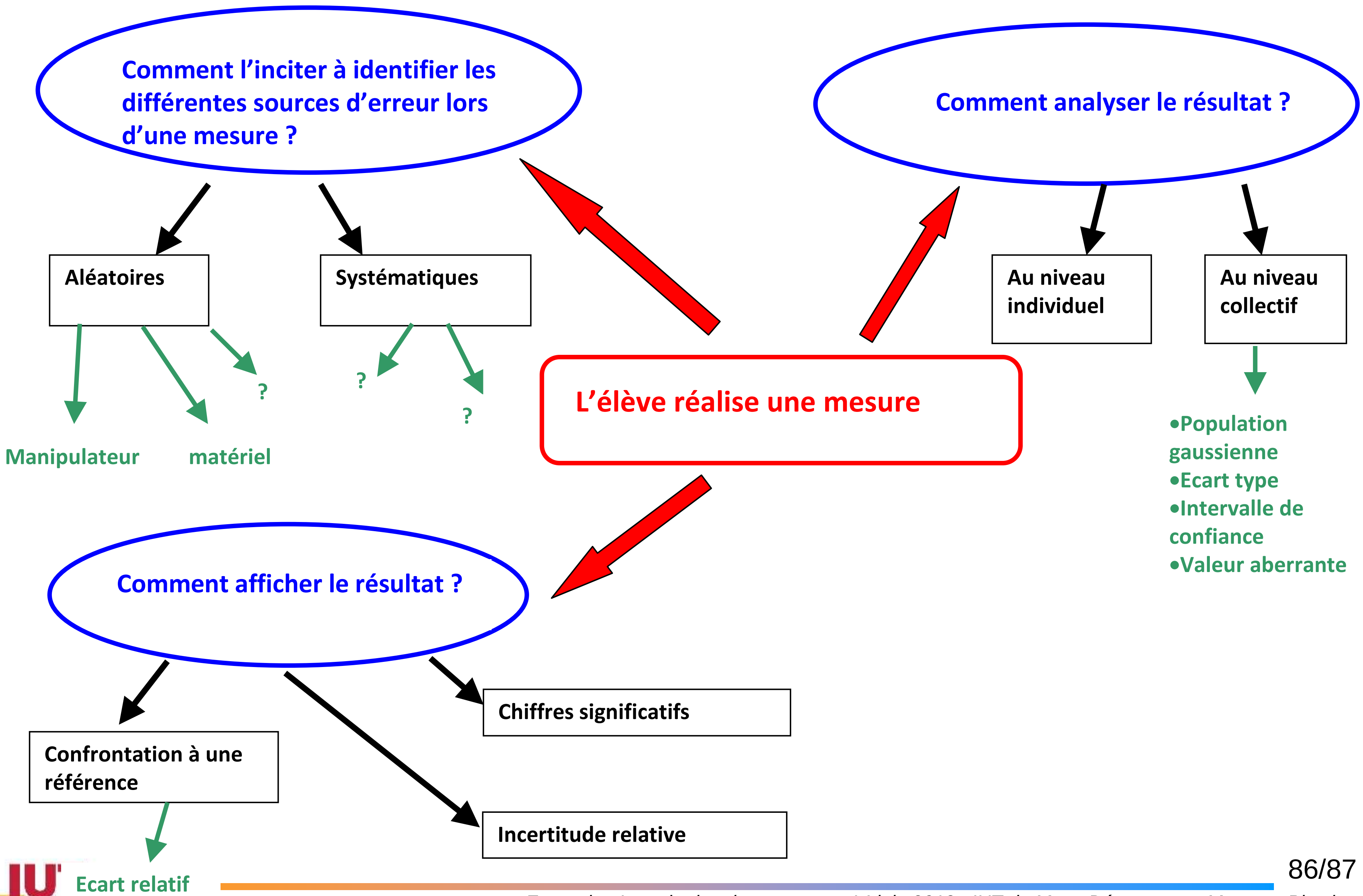
t = Loi.student.inverse(1-0,95;9) =2,26

VII- Récapitulatif des points importants

Notions et contenus	Compétences expérimentales exigibles	Commentaires
Erreurs et notions associées	Identifier les différentes sources d'erreur (de limites à la précision) lors d'une mesure : variabilités du phénomène et de l'acte de mesure (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments,…).	Identifier les erreurs aléatoires et systématiques
Incertitudes et notions associées	Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur.	Possibilité de représenter un histogramme pour comparer les incertitudes associées aux différentes sources d'erreurs
	Évaluer l'incertitude de répétabilité à l'aide d'une formule d'évaluation fournie.	Incertitude de type A : utiliser un tableur ou les fonctions de la calculatrice pour obtenir l'écart-type expérimental s_{exp} ou σ_{n-1} puis l'incertitude-type de répétabilité notée $u_{rép}$.
	Évaluer l'incertitude d'une mesure unique obtenue à l'aide d'un instrument de mesure.	Incertitude de type B : incertitude associée à la lecture sur un réglet, à la mesure d'une intensité à l'aide d'un multimètre, …
	Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs sources d'erreurs.	Incertitude-type composée (exemple pour la masse volumique : prise en compte de l'incertitude sur la masse et sur le volume)

Notions et contenus	Compétences expérimentales exigibles	Commentaires
Expression et acceptabilité du résultat	Maîtriser l'usage des chiffres significatifs et l'écriture scientifique. Associer l'incertitude à cette écriture.	Si le résultat est au $1/10^{ème}$, l'incertitude doit être au $1/10^{ème}$ (Si le résultat est au $1/100^{ème}$, l'incertitude doit être au $1/100^{ème}$ …)
	Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne, et une incertitude de mesure associée à un niveau de confiance.	$M = m \pm U(M)$ où m est la valeur mesurée ou une valeur moyenne L'incertitude de mesure ou incertitude-type élargie U(M) est associée à un niveau de confiance. Elle se déduit de l'incertitude-type u(M) par : U(M) = k. u(M) avec k=2 pour un niveau de confiance de 95 %
	Évaluer la précision relative.	Déterminer l'incertitude relative $\frac{U(M)}{m}$
	Déterminer les mesures à conserver en fonction d'un critère donné.	Rejeter les valeurs qui s'écartent trop de la valeur moyenne et refaire le calcul de la moyenne ou dans le cas d'un graphique, éliminer les points qui sont trop éloignés de la droite.
	Commenter le résultat d'une opération de mesure en le comparant à une valeur de référence.	On peut calculer l'écart relatif $e_r = \frac{m - m_{référence}\vert}{m_{référence}}$ exprimé souvent en pourcentage où m : valeur mesurée
	Faire des propositions pour améliorer la démarche.	Le matériel choisi n'a pas été utilisé correctement (problème d'étalonnage ou de calibre ou …). Le protocole peut être amélioré (…) Le nombre de mesures aurait dû être plus important …

Quel questionnement auprès de l’élève lorsqu’il mesure ?



Pour aller plus loin …

La métrologie en France
http://www.metrologie-francaise.fr/index.asp

L'association Métrodiff
http://www.metrodiff.org/cmsms/

Laboratoire National d'Essais (LNE)
http://e-formation.lne.fr/

Tout sur les unités de mesure
http://www.utc.fr/~tthomass/Themes/Unites/index.html

Evaluation des incertitudes de mesures, en métrologie optique
http://www.optique-ingenieur.org/fr/

Merci pour votre attention …

et faites de bonnes mesures !!