Le problème de la bataille de Hastings (par Sam Loyd)

6 avril 2014
Auteur : P. Derré

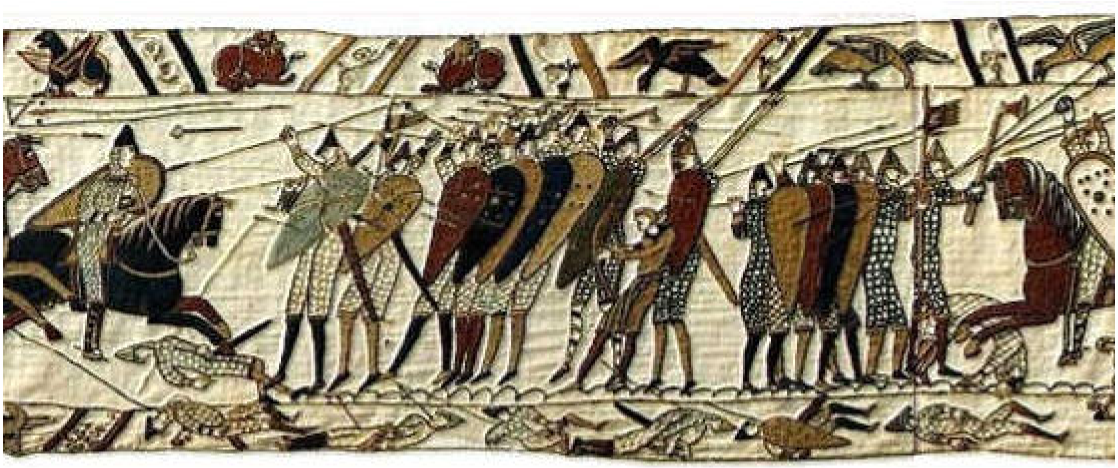
Le cadre d'utilisation de cette activité n'est pas figé. Le professeur pourra l'adapter à ses objectifs	
Classe	Tous niveaux (Bac et CAP)
Matériel	1 poste pour un ou deux élèves
Module	Algèbre, calcul numérique
Capacité visée lors de la séance	Déterminer, en écriture décimale, la valeur exacte ou une valeur arrondie de la racine carrée d'un nombre positif.
Connaissance visée lors de la séance	Racine carrée

Objectif de l'activité	- Trouver une solution à un problème par essais successifs - Développer l'autonomie et l'initiative et valoriser les élèves par l'utilisation d'une résolution non conventionnelle (non algébrique)
Connaissances et savoir-faire nécessaires	- Notion de racine carrée - Notion de nombre entier - Créer une suite sur un tableur
Organisation du travail de la classe	- Temps d'appropriation, explicitation du texte (5 min) - Recherche individuelle ou par petits groupes - L'utilité d'un outill d'automatisation et de systématisation de la recherche fait rapidement l'unanimité - Montages individuels ou par groupe de 2 d'un tableau sous forme de suite
Mise en commun et prolongements	- une solution est trouvée mais est-ce la seule ? - comment repérer facilement un nombre entier au milieu de milliers d'autres ?
Compétences travaillées et/ou évaluées	Analyser, valider

Fiche élèves

Le problème de la bataille de Hastings (par Sam Loyd)

La Bataille de Hastings eut lieu le 14 octobre 1066 à huit kilomètres au nord d'Hastings, dans la localité de Battle, dans le comté du Sussex de l'Est, dans le sud de l'Angleterre. Elle opposa le dernier roi anglo-saxon du pays, Harold Godwinson, au duc de Normandie, Guillaume le Conquérant, elle consacra le début de la conquête de l'Angleterre par ce dernier. Cette bataille est représentée sur la tapisserie de Bayeux qui illustre la conquête normande de l'Angleterre.



Les hommes de Harold se tenaient ensemble et formaient treize carrés et dans chaque carré, ils étaient également nombreux […] Quand Harold se lança dans la mêlée, les Saxons formèrent avec lui un unique carré, allant sus à l'ennemi.

Combien d'hommes avait Harold ?

Le problème de la bataille de Hastings (par Sam Loyd)

Ce problème posé par Sam Loyd au début du 20e siècle ne peut pas être résolu simplement. Pourtant les outils numériques permettent de trouver une solution en faisant une recherche systématique par essais successifs.. mais trouver une solution n'est pas forcément résoudre un problème !

Les hommes de Harold se tenaient ensemble et formaient treize carrés et dans chaque carré, ils étaient également nombreux […] Quand Harold se lança dans la mêlée, les Saxons formèrent avec lui un unique carré, allant sus à l'ennemi.

Combien d'hommes avait Harold ?

x : côté d'un des treize carrés ⇒ x^2 : nombre d'hommes dans un carré ⇒ $13x^2$: nombre total d'hommes
$13x^2 + 1$: Nombre total d'hommes dans le grand carré avec Harold ⇒
$\sqrt{13x^2+1}$: côté du grand carré ⇒ doit être un nombre entier

Recherches avec le tableur :

	A	B	C
1	**côté x d'un carré**	**Nombre total d'hommes avec Harold : 13x² + 1**	**Côté du grand carré : racine(13x² + 1)**
2	1	=A2^2+1	=racine(B2)
3	=A2+1		

On tire les formules de la 3e ligne vers le bas jusqu'à obtenir un nombre entier dans la colonne C, ce qui se produit quand x = 180.

	A	B	C
1	**côté x d'un carré**	**Nombre total d'hommes avec Harold : 13x² + 1**	**Côté du grand carré : racine(13x² + 1)**
2	1	14	3,74...
3	2	53	7,28...
181	180	421201	649

Harold avait donc 13 carrés de 180 hommes de côté soit 13 × 180 × 180 = 421 200 hommes.
En s'y ajoutant, ils forment un carré de 649 hommes de côté soit 649 × 649 = 421 201 hommes.

Y a-t-il une autre solution au-delà de 180 hommes de côté ?

Automatisons la recherche de la présence d'un nombre entier dans la colonne C :
Dans la colonne D, à partir de D2, la formule nous permet d'obtenir 1 si le nombre correspondant de la colonne C est un entier.
On totalise le nombre de 1 dans D1. Jusqu'à 10000, on n'obtient qu'une seule solution.
Vérifié jusqu'à 100 000 en modifiant la case A2 (on y met 10 001, puis 20 001...)

	A	B	C	D
1	**x**	**13x² + 1**	**racine(13x² + 1)**	=somme(D2:D10000)
2	1	=A2^2+1	=racine(B2)	=si(ent(C1)=C1;1;0)
3	=A2+1			

	A	B	C	D
1	**x**	**13x² + 1**	**racine(13x² + 1)**	1
2	1	14	3,74...	0
181	180	421201	649	1

La solution suivante s'obtient pour x = 233 640 soit 709 639 444 800 hommes, soit 100 fois la population terrienne actuelle...

Pour les curieux (aspirine non fournie) :
Résolution arithmétique du problème de la bataille de Hastings

D'après http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/12_Stoltz.pdf

Côté de chacun des 13 carrés : y
Nombre total d'hommes : $13y^2$
Nombre d'hommes avec Harold : $13y^2 + 1$
Côté du grand carré : x

$$\mathbf{13y^2 + 1 = x^2}$$

$$\mathbf{x^2 - 13y^2 = 1}$$

On obtient une équation de la forme $x^2 - Ky^2 = 1$ avec $K = 13$

Ceci est une équation de Fermat-Pell : équation de la forme

$$\mathbf{x^2 - Ky^2 = 1}$$

dans laquelle x et y sont des nombres entiers
et K est un nombre entier non carré.

Chaque solution (x_n, y_n) est donnée par :

$$x_n = \frac{(x_1+\sqrt{K}y_1)^n+(x_1-\sqrt{K}y_1)^n}{2} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{(x_1+\sqrt{K}y_1)^n-(x_1-\sqrt{K}y_1)^n}{2\sqrt{K}} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

et où (x_1, y_1) est la solution minimale en dehors de $(1,0)$.

Le nombre $\sqrt{K}$ est développé en fraction continue périodique, de période p,
La $p^{è}$ réduite étant $\frac{a}{b}$, la solution minimale est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = b \end{cases} \text{ si } p \text{ est pair} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = a^2 + Kb^2 \\ y_1 = 2ab \end{cases} \text{ si } p \text{ est impair.}$$

Dans notre cas, nous avons $x^2 - 13y^2 = 1 \Rightarrow K = 13$

Développement de $\sqrt{13}$ en fraction continue :

$\sqrt{13} = 3{,}605551275$

$3{,}605551275 - 3 = 0{,}605551275$ et $\frac{1}{0{,}605551275} = 1{,}651387819$ donc $\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1{,}65\ldots}$

$1{,}651387819 - 1 = 0{,}651387819$ et $\frac{1}{0{,}651387819} = 1{,}535183758$ donc $1{,}65\ldots = 1 + \frac{1}{1{,}53\ldots}$

$1{,}535183758 - 1 = 0{,}535183758$ et $\frac{1}{0{,}535183758} = 1{,}868517092$ donc $1{,}53\ldots = 1 + \frac{1}{1{,}86\ldots}$

$1{,}868517092 - 1 = 0{,}868517092$ et $\frac{1}{0{,}868517092} = 1{,}151387819$ donc $1{,}86\ldots = 1 + \frac{1}{1{,}15\ldots}$

$1{,}151387819 - 1 = 0{,}151387819$ et $\frac{1}{0{,}151387819} = 6{,}605551275$ donc $1{,}15\ldots = 1 + \frac{1}{6{,}60\ldots}$

$6{,}605551275 - 6 = 0{,}605551275$ et on retrouve la 1è ligne donc $6{,}60\ldots = 6 + \frac{1}{1{,}65\ldots}$

Cette périodicité se retrouve pour toutes les racines carrées de nombres entiers

donc = $\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1{,}65\ldots} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1{,}53\ldots}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1{,}86\ldots}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1{,}15\ldots}}}} =$

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6{,}60\ldots}}}}} = \mathbf{3} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}65\ldots}}}}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1{,}65\ldots}}}}}}}}}}}$$

On écrira : $\sqrt{13} = (3)(\overline{1,1,1,1,6})$

La période p est 5, elle contient 5 fractions, la 5è réduite est :

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}} = 3 + \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

Donc a = 18 ; b = 5 et p est impair donc

$$\begin{cases} x_1 = a^2 + Kb^2 \\ y_1 = 2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 18^2 + 13 \times 5^2 \\ y_1 = 2 \times 18 \times 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 649 \\ y_1 = 180 \end{cases}$$

Donc il y avait 13 carrés de 180 hommes de côté soit $13 \times 180^2 = 421\,200$ hommes, qui avec Harold formaient un carré de 649 hommes de côté

Autres solutions : $x_n = \dfrac{(x_1 + \sqrt{K}y_1)^n + (x_1 - \sqrt{K}y_1)^n}{2}$ et $y_n = \dfrac{(x_1 + \sqrt{K}y_1)^n - (x_1 - \sqrt{K}y_1)^n}{2\sqrt{K}}$

Pour n = 0, on obtient $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$

Pour n = 1, on obtient $x_1 = 649$ et $y_1 =$ **180** soit 421 200 hommes

Pour n = 2, on obtient $x_2 = 842\,401$ et $y_2 =$ **233 640** soit 709 639 444 800 hommes

Pour n = 3, on obtient $x_3 = 1\,093\,435\,849$ et $y_3 =$ **303 264 540** soit $\approx 1{,}2 \times 10^{18}$ hommes