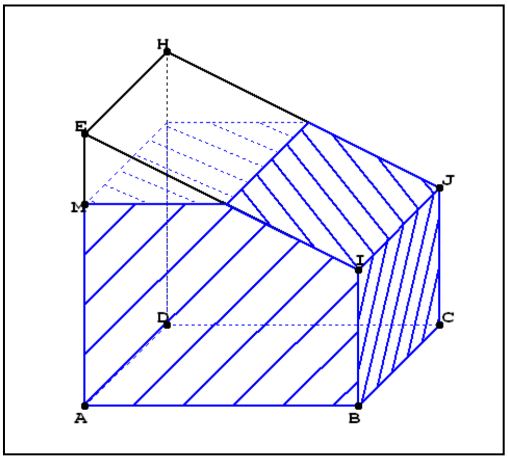
Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

# Jauger un réservoir

*Une activité en Seconde*




## *Enoncé l'activité*

Un réservoir peut être modélisé par le solide ci-dessus.
Les dimensions en centimètres sont: AB=40, BC=40, AE=40, BI=20, CJ=20.
Les faces ABCD et ADHE sont carrées, les faces IJHE et IJBC sont rectangulaires, les faces ABIE et DCJH sont des trapèzes rectangles.
La position du point M sur le segment [AE] est visible de l'extérieur du réservoir.
a)Quelle est la hauteur AM du liquide quand le réservoir est rempli aux trois quarts ?
b) Construire le long de [AE] une graduation qui indique le volume du réservoir de 4 litres en 4 litres.

## *Objectifs :*

Il s'agit de faire fonctionner plusieurs concepts de la classe de seconde à travers une situation riche : notion de variable, tableau de valeurs, fonction, courbe représentative d'une fonction, résolution graphique d'une équation, résolution algébrique d'une équation, différentes écritures d'une expression.
L'exploration avec un logiciel de géométrie dynamique ouvre la voie à des conjectures, l'utilisation d'un tableur permet d'affiner la conjecture, la mobilisation du calcul formel permet de bien mener la preuve en exploitant les différentes écritures d'une même expression algébrique.

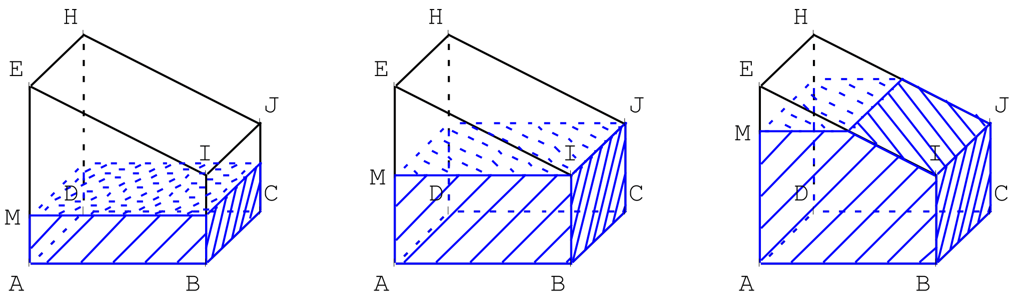
## *Scénario :*

**1.Ce qui a été fait avant :**
Cette activité a été proposée au milieu de l'année de seconde : les élèves ont déjà rencontré quelques situations de géométrie plane dans lesquelles les fonctions interviennent. Les notions de fonction, de résolution graphique d'une équation sont en cours de construction.
Les élèves n'ont aucune expérience sous Géospace c'est pourquoi l'animation est montrée en vidéoprojection. Les élèves ont déjà fait appel à un logiciel de calcul formel mis à disposition dans la salle de classe : cela peut-être une TI89 ou une TI*n*spire rétroprojetable achetée par l'établissement, ou un logiciel comme Xcas ou Dérive installé sur un ordinateur ressource en fond de classe.

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

**2.Le déroulement :**
Le texte de l'activité est distribué et l'animation faite sous géospace permet de mieux s'approprier la situation.

**S'approprier la situation avec le logiciel géospace :**




**Vers une conjecture**
Pour le a), les élèves conjecturent très vite que la longueur AM est comprise entre 20 et 30. On peut affiner la conjecture en faisant afficher les valeurs de AM et celles du volume correspondant en litres. On arrive à une longueur AM comprise entre 22,6 et 22,7.

**Affiner la conjecture**
Certains parlent de tableur pour obtenir un meilleur encadrement mais il faudrait alors exprimer le volume de liquide en fonction de la longueur AM. L'expression « en fonction de» est lâchée : on note *x* la longueur AM en cm ( avec *x* compris entre 0 et 40) et V(*x*) le volume de liquide en litres.
Le cas $x \le 20$ est facile : le volume est $40 \times 40 \times x$ d'où le résultat en litres : $V(x) = 1.6x$
On travaille alors à exprimer V(*x*) en fonction de *x* pour x>20 : après utilisation du théorème de Thalès et rappels sur le volume d'un prisme, plusieurs expressions viennent dont :

$$48000 - \frac{1}{2} \times (40 - x)(80 - 2x) \times 40$$

ou $32000 + \frac{1}{2} \times (40 + 80 - 20x)(x - 20) \times 40$

ou $-40x^2 + 3200x - 16000$

d'où le volume exprimé en litres :
$V(x) = -0.04x^2 + 3,2x - 16$.

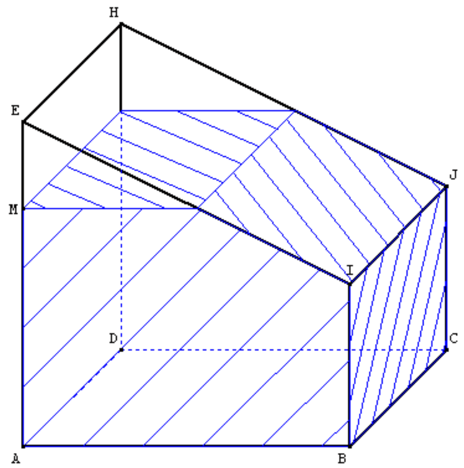
Le tableur permet des approximations successives et la conjecture suivante :

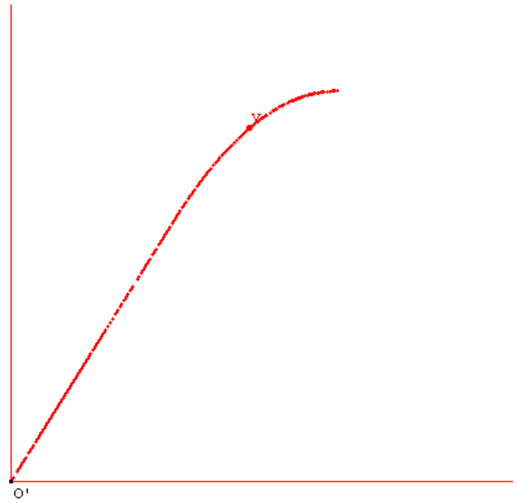
Quand le réservoir est rempli aux trois quarts (36 litres), AM est compris entre 22.6 et 22.7 cm

| x | V(x) |
|---|---|
| 22 | 35,04 |
| 22,1 | 35,18 |
| 22,2 | 35,33 |
| 22,3 | 35,47 |
| 22,4 | 35,61 |
| 22,5 | 35,75 |
| 22,6 | 35,89 |
| 22,7 | 36,03 |
| 22,8 | 36,17 |
| 22,9 | 36,3 |
| 23 | 36,44 |
| | |
| 22,6 | 35,89 |
| 22,61 | 35,9 |
| 22,62 | 35,92 |
| 22,63 | 35,93 |
| 22,64 | 35,95 |
| 22,65 | 35,96 |
| 22,66 | 35,97 |
| 22,67 | 35,99 |
| 22,68 | 36 |
| 22,69 | 36,01 |
| 22,7 | 36,03 |

Académie de Nantes
gerard.cordes@ac-nantes.fr

Certains pensent à faire une représentation graphique de la fonction *f* sur calculatrice (les élèves ont déjà rencontré des fonctions définies par morceaux). Le graphique est confirmé par géospace .




C'est le haut du graphique qui étonne :

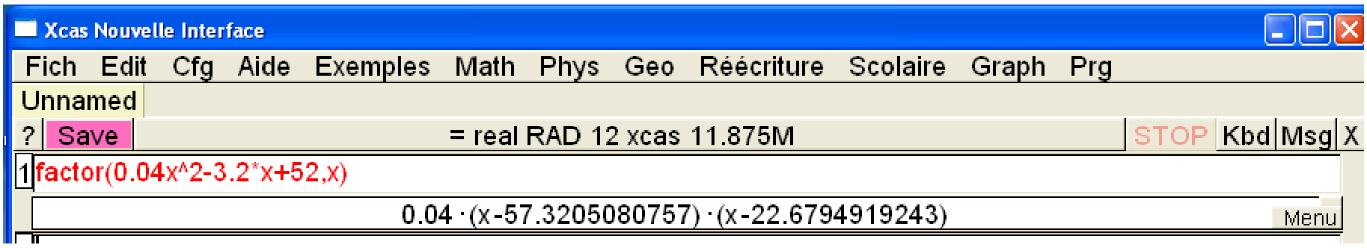
pour l'expliquer je reviens au tableur,
en ouvrant une nouvelle colonne de différences.

| A | B | C |
|---|---|---|
| x | V(x) | V(x)-V(x-1) |
| 0 | 0 | |
| 1 | 1,6 | 1,6 |
| 2 | 3,2 | 1,6 |
| 3 | 4,8 | 1,6 |
| 4 | 6,4 | 1,6 |
| 5 | 8 | 1,6 |
| 6 | 9,6 | 1,6 |
| 7 | 11,2 | 1,6 |
| 8 | 12,8 | 1,6 |
| 9 | 14,4 | 1,6 |
| 10 | 16 | 1,6 |
| 11 | 17,6 | 1,6 |
| 12 | 19,2 | 1,6 |
| 13 | 20,8 | 1,6 |
| 14 | 22,4 | 1,6 |
| 15 | 24 | 1,6 |
| 16 | 25,6 | 1,6 |
| 17 | 27,2 | 1,6 |
| 18 | 28,8 | 1,6 |
| 19 | 30,4 | 1,6 |
| 20 | 32 | 1,6 |
| 21 | 33,56 | 1,56 |
| 22 | 35,04 | 1,48 |
| 23 | 36,44 | 1,4 |
| 24 | 37,76 | 1,32 |
| 25 | 39 | 1,24 |
| 26 | 40,16 | 1,16 |
| 27 | 41,24 | 1,08 |
| 28 | 42,24 | 1 |
| 29 | 43,16 | 0,92 |
| 30 | 44 | 0,84 |
| 31 | 44,76 | 0,76 |
| 32 | 45,44 | 0,68 |
| 33 | 46,04 | 0,6 |
| 34 | 46,56 | 0,52 |
| 35 | 47 | 0,44 |
| 36 | 47,36 | 0,36 |
| 37 | 47,64 | 0,28 |
| 38 | 47,84 | 0,2 |
| 39 | 47,96 | 0,12 |
| 40 | 48 | 0,04 |

**La preuve assistée par ordinateur :**

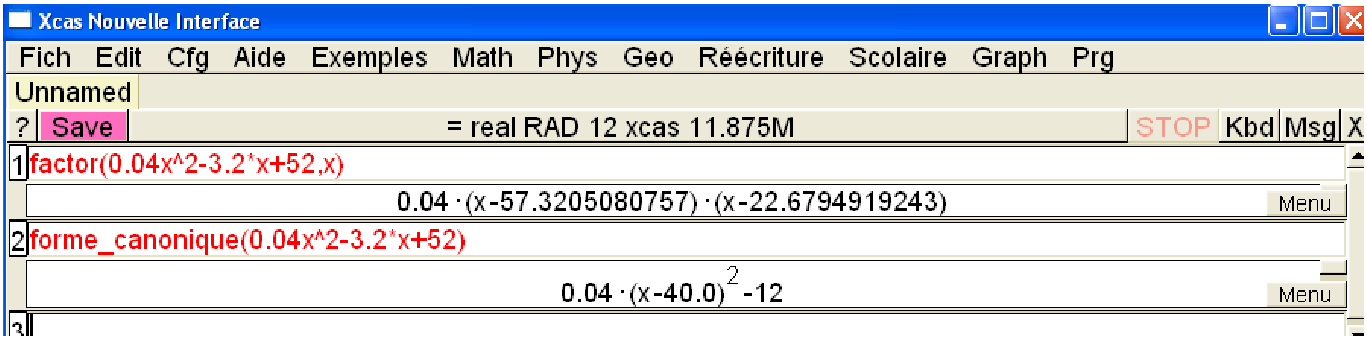
Trouver la hauteur de liquide quand le réservoir est rempli aux trois quart revient à résoudre l'équation :
$V(x)=36$ ou encore : $-0.04x^2+3,2x-16=36$ soit : $0.04x^2-3,2x+52=0$

L'équation est difficile à résoudre en seconde : les élèves pensent à une factorisation mais n'arrivent pas à factoriser : on fait appel à un logiciel de calcul formel comme Xcas .




Ce premier résultat est rassurant car on retrouve une solution voisine de 22.7 mais la factorisation n'est pas exacte ( il suffit de raisonner sur les derniers chiffres du produit $57.3205080757\times22.6794919243$.

Je suggère la commande forme canonique déjà rencontrée :

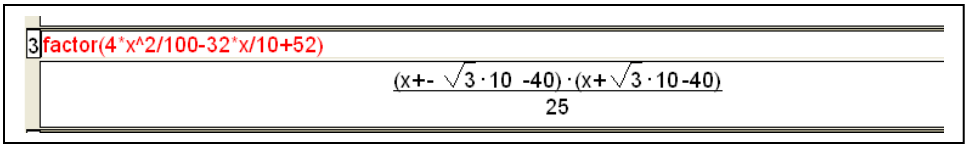



Le problème revient à résoudre l'équation $0.04(x-40)^2-12=0$ ou $(x-40)^2=300$

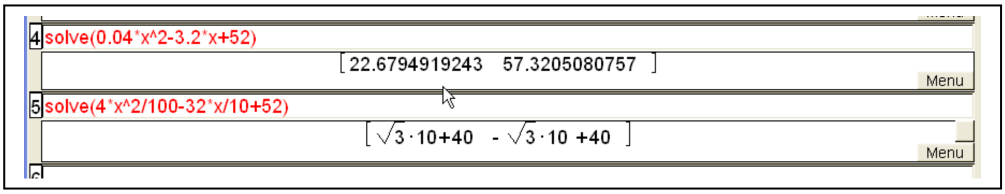
Et, avec cette nouvelle écriture, l'élève de seconde peut terminer et conclure que la valeur exacte de la solution est : $40-10\sqrt{3}$.

**Remarque 1** :

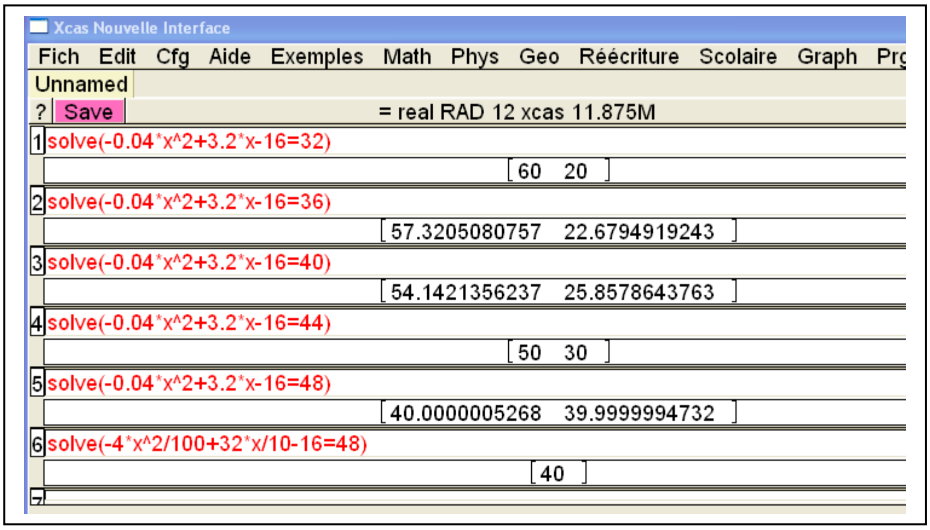
En écrivant V(*x*)–36 sous la forme, $\dfrac{4}{100}x^2-\dfrac{32}{10}x+52$, on obtient une factorisation plus exacte :



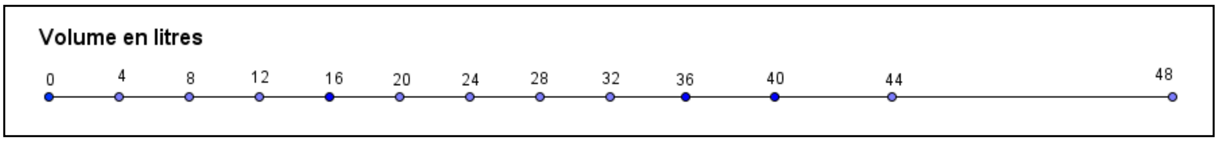

**Remarque2** : On aurait pu choisir d'utiliser l'instruction Solve, mais cette instruction ressemble davantage à une boîte noire car on maîtrise moins la nature de la tâche effectuée par le logiciel.



**Remarque 3 :**
Pour fabriquer la jauge, les élèves résolvent équations $1.6x = 4$,……., $1.6x = 32$
Puis ils choisissent de continuer avec Xcas pour résoudre les équations : $-0.04x^2 + 3.2x - 16 = 40$, $-0.04x^2 + 3.2x - 16 = 44$ , $-0.04x^2 + 3.2x - 16 = 48$ (voir les lignes 5 et 6 du fichier Xcas suivant)




Dans un premier temps, la démarche choisie n'a pas été d'utiliser l'instruction solve (qui ressemble un peu à une boîte noire ) mais plutôt d'utiliser une écriture algébrique pertinente. Mais pour cette question, la tâche est répétitive, les élèves utiliseront l'instruction solve.




## *Compétences expérimentales :*

► Utiliser des cas particulier pour énoncer une première conjecture.
► Prendre l'initiative d'utiliser un tableur pour mener une démarche d'approximations successives.
► Prendre l'initiative d'afficher des grandeurs géométriques pour affiner une conjecture.
► Prendre l'initiative d'utiliser la trace d'un point pour visualiser une courbe.
► Prendre l'initiative d'utiliser un tableur pour examiner les différences successives et comprendre la vitesse de croissance.
► Prendre l'initiative de mobiliser un logiciel de calcul formel pour obtenir plusieurs écritures d'une même expression ( factorisation, forme canonique).
► Avoir une analyse critique des différentes expressions produites par un logiciel de calcul formel. Choisir l'écriture algébrique la mieux adaptée pour résoudre un problème.

## *Piste pour une évaluation*

On peut proposer cette situation voisine avec le même énoncé.