Thème : Nombres particuliers

Activité 2. Nombres de Fermat (4 exercices)

Présentation générale des nombres de Fermat

Pierre DE FERMAT 1601 - 1665

Pierre de Fermat :

Pierre de Fermat, né en 1601 près de Montauban, et mort en 1665 à Castres est un magistrat, mathématicien français. Il a produit un grand nombre de contributions à divers domaines des mathématiques. Il a échangé une correspondance abondante avec d'autres mathématiciens comme Mersenne et Descartes.

Définition des nombres de Fermat

Un **nombre de Fermat** est un entier naturel qui s'écrit sous la forme $2^{2^n}+1$, avec n entier naturel. Le $n$ième nombre de Fermat est noté. $F_n = 2^{2^n}+1$.

Exemples

n	Nombre de Fermat F_n	
0	$F_0 = 2^1+1$	$F_0 = 3$
1	$F_1 = 2^2+1$	$F_1 = 5$
2	$F_2 = 2^4+1$	$F_2 = 17$
3	$F_3 = 2^8+1$	$F_3 = 257$
4	$F_4 = 2^{16}+1$	$F_4 = 65\,537$
5	$F_5 = 2^{32}+1$	$F_5 = 4\,294\,967\,297$
6	$F_6 = 2^{64}+1$	$F_6 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617$
…	…	…

Quelles sont des propriétés des nombres de Fermat ? (démonstrations en exercices)

1. La suite des nombres de Fermat possède plusieurs relations de récurrence. Par exemple :
   - Pour tout entier naturel n : $(F_n - 1)^2 = F_{n+1} - 1$
   - Pour tout entier naturel non nul n : $F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_{n-1} = F_n - 2$
2. Deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
3. Tous les nombres de Fermat F_n ont comme chiffre des unités 7 à partir de $n = 2$.

Quels sont les nombres de Fermat premiers connus ?

- Aujourd'hui on connait seulement les nombres de Fermat premiers déterminés dans l'exercice 1 de cette fiche. On conjecture qu'il n'y a pas d'autres nombres de Fermat premiers que ceux-là.

Intérêt des nombres de Fermat

- Historiquement, l'étude par Fermat de ces nombres était motivée par la recherche de grands nombres premiers. Fermat savait que les premiers nombres $F_n = 2^{2^n}+1$ sont premiers. Il conjecturait que c'était vrai pour tous.
- On retrouve les nombres de Fermat dans des développements ultérieurs des mathématiques. Les mathématiciens allemand Carl Gauss (1777-1855) et français Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) ont montré qu'un polygone régulier à n côtés est constructible à la règle (non graduée) et au compas si et seulement si la décomposition en facteurs premiers de n ne contient pas d'autres nombres premiers que 2 ou un nombre premier de Fermat. Cela revient à construire à la règle et au compas un angle de mesure $\frac{2\pi}{n}$.
- Les recherches de factorisation des nombres de Fermat se poursuivent.
  (voir le site www.prothsearch.net/fermat.html)

Exercice 1 : ***Présentation générale des nombres de Fermat***

Pré requis : Nombres premiers. Programme de test de la primalité tel que le programme TESTB étudié dans l'activité 2 du thème « Les nombres premiers ».

Objectifs : S'approprier la définition des nombres de Fermat avant l'étude de quelques propriétés. Expérimenter les limites de la calculatrice.

On rappelle que les nombres de Fermat, sont les entiers de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour quelles valeurs de n telles que $0 \leq n \leq 6$ les nombres de Fermat sont-ils premiers ?

Exercice 2 : ***Deux relations de récurrence vérifiées par les nombres de Fermat***

Pré requis : Calcul sur les puissances, démonstration par récurrence.
Objectif : Prouver deux relations de récurrence vérifiées par les nombres de Fermat.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(F_k - 1)^2 = F_{k+1} - 1.$$

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_{n-1} = F_n - 2.$$

Exercice 3 : ***L'infinitude des nombres premiers démontrée avec les nombres de Fermat***

Pré requis : Le résultat de la question 2 de l'exercice 2, les notions de diviseurs, de diviseurs premiers d'un entier, de nombres premiers entre eux.
Objectif : Démontrer différemment qu'il y a une infinité de nombres premiers.

On rappelle que les nombres de Fermat, sont les entiers de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Vérifier que tous les nombres de Fermat sont impairs.
2) Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_{n-1} = F_n - 2$, montrer que supposer qu'il existe $d \geq 3$ un diviseur commun aux nombres de Fermat F_k et F_n où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, aboutit à une contradiction.
3) Déduire des questions 1) et 2) que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
4) a) On appelle E_{n-1} l'ensemble de tous les diviseurs premiers des nombres de Fermat $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ et on appelle E_n l'ensemble de tous les diviseurs premiers des nombres de Fermat $F_0, F_1, \ldots, F_n$.

   Sachant que tout entier possède au moins un diviseur premier, montrer que E_n contient plus de diviseurs premiers que E_{n-1}.

   b) Déduire de ce qui précède qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 4 : ***A partir de n = 2, les nombres de Fermat ont comme chiffre des unités 7***

Pré requis : Le reste dans la division par 10, le raisonnement par récurrence, la relation de congruence.
Objectif : Démontrer une propriété particulière des nombres de Fermat.

On rappelle que les nombres de Fermat, sont les entiers de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel k, $F_{k+1} = (F_k)^2 - 2F_k + 2$.
2) Démonter, en utilisant un raisonnement par récurrence, que la propriété

   $P(n)$ « tout nombre de Fermat F_n a pour chiffre des unités 7 » est vraie pour tout entier $n \geq 2$.