Thème : Quelques applications des congruences

Corrigé de l'activité 8. Systèmes avec des congruences (2 exercices)

Exercice 1 : Le théorème des restes chinois

On se propose de déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{Z}$ telles que $\begin{cases} x \equiv 3 \quad (11) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x \equiv 3 \quad (11) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 3 + 11u \\ \text{Il existe } v \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 4 + 15v \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } (u; v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } 3 + 11u = 4 + 15v \\ x = 3 + 11u \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } (u; v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } 11u - 15v = 1 \\ x = 3 + 11u \end{cases}$

2) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $11u - 15v = 1$.

- 11 et -15 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, cette équation a des solutions.
- Pour trouver un couple particulier de solutions, on peut faire par exemple cette table à la calculatrice :

$$11X - 15Y = 1$$
$$11X - 1 = 15Y$$
$$Y = \frac{11X - 1}{15}$$

X	$Y = \dfrac{11X - 1}{15}$
-7	-5,2
-6	-4,467
-5	-3,733
-4	**-3**
-3	-2,267
-2	-1,533
-1	-0,8

On a donc avec cette table le couple particulier de solutions $(u_0; v_0) = (-4; -3)$.

<u>Alternative :</u> « descendre » puis « remonter » l'algorithme d'Euclide en remplaçant les coefficients de u et v dans l'équation diophantienne par leurs valeurs absolues $11u + 15v = 1$ (il faut juste considérer qu'on obtiendra $-v$).

On pose $\begin{cases} a = 11 \\ b = 15 \end{cases}$. On écrit la succession de divisions euclidiennes en commençant par $a = bq + r$:

$11 = 15 \times 0 + 11$		Conclusion : $1 = 11u + 15v$ avec $u = -4$ et $v = 3$
		$1 = 15 \times 3 - 11 \times 4$
$15 = 11 \times 1 + \mathbf{4}$		$1 = -11 + \mathbf{(15 - 11 \times 1)} \times 3$ soit $1 = 15 \times 3 - 11 \times (1 + 3)$
		$1 = -11 + \mathbf{4} \times 3$
$11 = 4 \times 2 + \mathbf{3}$		$1 = 4 - \mathbf{(11 - 4 \times 2)} \times 1$ soit $1 = -11 + 4 \times (1 + 2)$
$4 = 3 \times 1 + 1$		$1 = 4 - \mathbf{3} \times 1$
On arrête au dernier reste non nul (ici **1**).		Puis on isole **1** et on remonte en remplaçant l'entier qui correspond à un reste dans l'algorithme d'Euclide, à chaque étape.

Ainsi le couple $(u_0; v_0) = (-\mathbf{4};\ -\mathbf{3})$ est un couple particulier de solutions de l'équation :

$$11u - 15v = \mathbf{1}$$

- On écrit l'équation sans second membre :

$$\begin{array}{c} 11u - 15v = 1 \\ \underline{11 \times (-4) - 15 \times (-3) = 1} \end{array}$$

Par soustraction on a l'équation $11(u+4) - 15(v+3) = 0$ sans second membre.

Donc $11(u+4) = 15(v+3)$.

$\left.\begin{array}{c} 11 \text{ divise } \quad 15 \times (v+3) \\ 11 \text{ et } 15 \text{ sont premiers entre eux} \end{array}\right\}$ donc, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $v+3$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $11k = v + 3$. Donc $v = 11k - 3$.

En remplaçant v en fonction de k dans l'équation sans second membre :

$$11(u+4) - 15(11k - 3 + 3) = 0$$
$$11(u+4) - 15(11k) = 0$$
$$(u+4) - 15(k) = 0$$
$$u = 15k - 4$$

Les solutions de l'équation $11u - 15v = 1$ sont donc de la forme $(15k - 4\,; 11k - 3)$

Réciproque :

Tous ces couples sont-ils solutions de l'équation complète $11u - 15v = 1$?

On remplace u par $15k - 4$ et v par $11k - 3$.

$$11(15k-4) - 15(11k-3) = 165k - 44 - 165k + 45$$
$$11(15k-4) - 15(11k-3) = 1$$
$$\mathcal{S} = \{(15k - 4\,; 11k - 3) \text{ quel que soit } k \in \mathbb{Z}\}$$

3) D'après la question 1), les solutions du système $\begin{cases} x \equiv 3 \quad (11) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases}$ sont les entiers relatifs $x = 3 + 11u$ (ou bien, de façon équivalente $x = 4 + 15v$).

Ainsi :

$x = 3 + 11(15k - 4)$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$.

$x = 165k - 41$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$.

4) Notons x les numéros des jours où les deux phénomènes sont présents simultanément.

On a alors x solutions du système $\begin{cases} x \equiv 3 \quad (11) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases}$.

Et donc d'après la question précédente, $x = 165k - 41$ où k décrit $\mathbb{Z}$.

Si on considère que seules les valeurs positives des solutions x conviennent, les valeurs de k vérifient :

$165k - 41 \geq 0$

$k \geq \frac{41}{165}$ avec $\frac{41}{165} \approx 0{,}252$

Donc pour les entiers $k \geq 1$ on aura les valeurs de x positives :

k	$x = 165k - 41$
1	124
2	289
3	454
…	…

Les deux phénomènes seront visibles simultanément aux jours n°124, 289, 454, …ainsi de suite tous les 165 jours.

5) a) Résolvons le système $\begin{cases} x \equiv 3 \quad (5) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases}$.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \quad (5) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 3 + 5u \\ \text{Il existe } v \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 4 + 15v \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 \quad (5) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } (u; v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } 3 + 5u = 4 + 15v \\ x = 3 + 5u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 \quad (5) \\ x \equiv 4 \quad (15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } (u; v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } 5u - 15v = 1 \\ x = 3 + 5u \end{cases}$$

Soit l'équation à résoudre $5u - 15v = 1$.
5 et -15 ne sont pas premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, cette équation n'a pas de solution.

Alternative :

$$5u - 15v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \times (u - 3v) = 1$$

Impossible car 1 n'est pas divisible par 5.

b) Le système à résoudre à la question 5)a) est un contre exemple.

Donc on ne peut donc pas prétendre qu'il y a toujours des solutions lorsque p et q ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 2 : Un engrenage

Voir le fichier GeoGebra pf5372b08.systemes_avec_congruences_geogebra.ggb

1) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $15q - 28q' = 6$.

$d = PGCD(15; 28) = 1$ et $6 = kd$ avec $k = 6$. Donc cette équation a des solutions.

- On cherche un couple particulier de solutions de l'équation

$$15u - 28v = 1$$

- Pour trouver un couple particulier de solutions, on peut faire par exemple cette table à la calculatrice :

$$15X - 28Y = 1$$
$$15X - 1 = 28Y$$
$$Y = \frac{15X - 1}{28}$$

X	$Y = \dfrac{15X - 1}{28}$
-16	-8,607
-15	-8,071
-14	-7,536
-13	**-7**
-12	-6,464
-11	-5,929
-10	-5,393

On a donc avec cette table le couple particulier de solutions $(u_0\,; v_0) = (-13; -7)$

Alternative : « descendre » puis « remonter » l'algorithme d'Euclide en remplaçant les coefficients u et v dans l'équation diophantienne par leurs valeurs absolues $15u + 28v = 1$ (il faut juste considérer qu'on obtiendra $-v$).

On pose $\begin{cases} a = 15 \\ b = 28 \end{cases}$. On écrit la succession de divisions euclidiennes en commençant par $a = bq + r$:

$15 = 28 \times 0 + 15$		Conclusion : $1 = 15u + 28v$ avec $u = -13$ et $v = 7$
		$1 = -15 \times 13 + 28 \times 7$
$28 = 15 \times 1 + \mathbf{13}$		$1 = -15 \times 6 + \mathbf{(28 - 15)} \times 7$ soit $1 = -15 \times (6 + 7) + 28 \times 7$
		$1 = -15 \times 6 + \mathbf{13} \times 7$
$15 = 13 \times 1 + \mathbf{2}$		$1 = 13 - \mathbf{(15 - 13 \times 1)} \times 6$ soit $1 = -15 \times 6 + 13 \times (1 + 6)$
$13 = 2 \times 6 + 1$		$1 = 13 - \mathbf{2} \times 6$
On arrête au dernier reste non nul (ici **1**).		On isole 1 et on remonte en remplaçant l'entier qui correspond à un reste dans l'algorithme d'Euclide

Ainsi le couple $(u_0\,; v_0) = (-13\,;\ -7)$ est un couple particulier de solutions de l'équation :

$$15u - 28v = 1$$

Donc le couple $(q_0\,; q_0') = (-13 \times 6\,;\ -7 \times 6) = (\mathbf{-78}\,;\ \mathbf{-42})$ est un couple particulier de solutions de l'équation

$$15q - 28q' = \mathbf{6}$$

On écrit l'équation sans second membre :

$$15q - 28q' = 6$$
$$\underline{15 \times (-78) - 28 \times (-42) = 1}$$

Par soustraction on a l'équation $15(q + 78) - 28(q' + 42) = 0$ sans second membre.

Donc $15(q + 78) = 28(q' + 42)$.

$\left.\begin{array}{c} 15 \text{ divise } \quad 28 \times (q' + 42) \\ 15 \text{ et } 28 \text{ sont premiers entre eux} \end{array}\right\}$ donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise $q' + 42$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $15k = q' + 42$
donc $q' = 15k - 42$.

En remplaçant q' en fonction de k dans l'équation sans second membre :

$$15(q + 78) - 28(q' + 42) = 0$$
$$15(q + 78) - 28(15k - 42 + 42) = 0$$
$$15(q + 78) - 28(15k) = 0$$
$$q + 78 - 28k = 0$$
$$q = 28k - 78$$

Les solutions de l'équation $15q - 28q' = 6$ sont donc de la forme $(28k - 78\,; 15k - 42)$

Réciproque :

Tous ces couples sont-ils solutions de l'équation complète $15q - 28q' = 6$?
On remplace q par $28k - 78$ et q' par $15k - 42$.

$$15(28k - 78) - 28(15k - 42) = 15 \times 28k - 1170 + 28 \times 15k + 1176$$
$$15(28k - 78) - 28(15k - 42) = 6 \text{ quel que soit } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathcal{S} = \{(28k - 78\,; 15k - 42) \text{ quel que soit } k \in \mathbb{Z}\}$$

2) $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (15) \\ x \equiv 8 \quad (28) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } q \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \quad x = 2 + 15q \\ \text{Il existe } q' \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \quad x = 8 + 28q' \end{cases}$

$\begin{cases} x \equiv 2 \quad (15) \\ x \equiv 8 \quad (28) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } (q; q') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que} \quad 2 + 15q = 8 + 28q' \\ \boldsymbol{x = 2 + 15q} \end{cases}.$

Résolvons l'équation $2 + 15q = 8 + 28q'$

$$15q - 28q' = 6$$

D'après la question 1), $\mathcal{S} = \{(28k - 78\,; 15k - 42) \text{ quel que soit } k \in \mathbb{Z}.\}$

Donc les solutions du système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (15) \\ x \equiv 8 \quad (28) \end{cases}$ sont les entiers relatifs $\boldsymbol{x = 2 + 15q}$

Ainsi :

$$x = 2 + 15(28k - 78)$$
$$x = 15 \times 28k - 1170 + 2$$
$$\underline{x = 420k - 1168 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}}$$

3) a) La première conjonction des deux rayons à droite aura lieu quand x prendra sa plus petite valeur positive.

On cherche la plus petite valeur de $k \in \mathbb{Z}$ telle que :

$$x \geq 0$$

$$420k - 1168 \geq 0$$

$$420k \geq 1168$$

$$k \geq \frac{1168}{420}$$

$$k \geq 2{,}781 \ldots$$

Donc, puisque $k \in \mathbb{Z}$, c'est pour $k = 3$ qu'aura lieu la première conjonction des rayons à droite.

Ainsi, la plus petite valeur de x positive satisfaisant le système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (15) \\ x \equiv 8 \quad (28) \end{cases}$ est $x = 420(3) - 1168$

$$x = 92$$

La première conjonction aura lieu à $\underline{t = 92\ s}$.

b) La deuxième conjonction aura lieu pour la valeur de k suivante, c'est-à-dire $k = 4$.

$$x = 420(4) - 1168$$

$$x = 512$$

La deuxième conjonction aura lieu à $t = 512$ s.

<u>Alternative :</u>

La relation $x = 420k - 1168$ montre que la période des conjonctions est 420.

Puisque la première conjonction a lieu à $t = 92s$, la seconde aura lieu à $t = 92 + 420$

$$t = 512\ s.$$