

Thème : Quelques applications des congruences

Activité 8. Systèmes avec des congruences (2 exercices)

Pré requis : Bézout, congruences.

Objectifs : Utiliser les congruences et leurs propriétés dans la résolution d'un problème concret.

Exercice 1 : Le théorème des restes chinois

On se propose de déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{Z}$ telles que
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

1) Montrer que résoudre ce système revient à résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $11u - 15v = 1$.

Méthode : On réécrit ce système sans congruence en utilisant l'équivalence :

$$a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow \text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + kc$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $11u - 15v = 1$.

3) En déduire les solutions du système
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

4) Application :

Le phénomène n°1 est observé la première fois au jour n°3. Il se répète ensuite avec une période de 11 jours.

Le phénomène n°2 est observé la première fois au jour n°4. Il se répète ensuite avec une période de 15 jours.

Quels sont les numéros des jours où ces deux phénomènes sont observables simultanément ?

5) Ce genre de problème est lié à des problèmes d'astronomie du type « Si un 1^{er} astre, de période d'apparition p est apparu au jour x_1 et si un 2^{ème} astre de période d'apparition q est apparu au jour x_2 , quels sont les jours où ces deux astres apparaîtront en même temps ? » Les astronomes chinois l'avaient résolu.

a) Résoudre le système
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

b) Le système
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{p} \\ x \equiv 4 \pmod{q} \end{cases}$$
 a-t-il toujours des solutions lorsque p et q ne sont pas premiers entre eux ?

Exercice 2 : Un engrenage

1) Résoudre l'équation (E) :

$$15q - 28q' = 6.$$

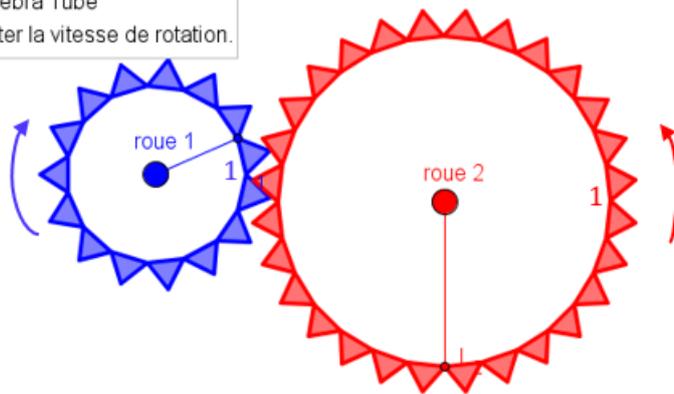
où q et q' sont des nombres entiers.

2) En déduire les solutions du système suivant (S) :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 8 \pmod{28} \end{cases}$$

3) On a modélisé un engrenage composé de deux roues dentées avec le logiciel GeoGebra :

D'après "Engrenages"
Patrick Clément - GeoGebra Tube
Pour démarrer, augmenter la vitesse de rotation.



Temps = 1 s

n° de la dent à droite **1**
Le rayon est-il à droite ?

n° de la dent à droite **1**
Le rayon est-il à droite ?

A-t-on conjonction des deux rayons ?



La roue 1 a 15 dents et la roue 2 a 28 dents. On règle la position du rayon sur la roue 1 à sa dent n°2 et sur la roue 2 à sa dent n°8. On augmente la vitesse de rotation de la roue 1 qui entraîne la roue 2. Chaque seconde une dent prend la place de la précédente (les dents sont numérotées dans les « creux »). Au temps=1s, les dents n°1 des deux roues sont à droite.

- A quel temps aura-t-on la première conjonction des rayons à droite, c'est-à-dire verra-t-on pour la première fois les deux rayons à droite en même temps ?
- A quel temps aura-t-on la deuxième conjonction ?