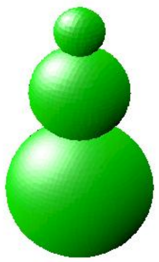
Gérard CORDES – groupe TraAM Maths et TICE de l'académie de Nantes – Mai 2012

Empilements de boules (1S)



Compétences calculatoires :

▫ Modéliser une situation à l'aide des suites.
▫ Reconnaissance d'une suite géométrique.
▫ Utilisation de la formule $1+b+\ldots+b^n$
▫ Ecritures avec le signe Σ.
▫ Calcul exact et calcul approché.
▫ Mobilisation d'un logiciel de calcul formel (ou d'un tableur).

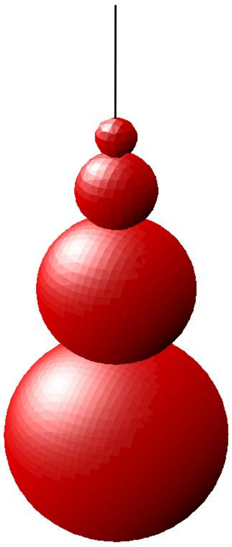
Descriptif rapide

A partir d'une question ouverte les élèves modélisent la situation proposée par une suite géométrique. Pour répondre au problème posé, certains souhaitent faire une figure précise sous géogébra, d'autres font des calculs par essais successifs à la calculatrice, d'autres pensent à mobiliser un logiciel de calcul formel.

Travail de recherche donné en 1S fin décembre. La première séquence sur les suites est terminée depuis quelques semaines. Ce problème ouvert ne mobilise donc pas les outils mathématiques étudiés à cette période. Cette activité va permettre de se rendre compte de l'autonomie de l'élève dans la modélisation d'une situation et dans l'utilisation des formules.

Sommaire :

Enoncé de l'exercice



Pour fabriquer une décoration de Noël, une ville décide d'enfiler des boules sur un fil vertical de 8 mètres de longueur.
On sait que :

- ▫La première boule a un rayon égal à 1 mètre
- ▫A partir de la deuxième boule, le rayon de chaque boule est égal aux deux tiers du rayon de la boule précédente.

Combien de boules peut-on enfiler sur ce fil ?

Objectifs du programme de 1S :

Mettre en œuvre une recherche de façon autonome, mener des raisonnements, avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats, choisir et appliquer des techniques de calcul, modéliser et étudier une situation à l'aide des suites , utiliser un logiciel de calcul formel pour limiter le temps consacré aux calculs techniques afin de mieux se concentrer sur les raisonnements ,mettre en perspective des résultats ,utilisation du signe Σ, approche expérimentale de la notion de limite, confrontation de la notion de croissance et de celle de limite .

Cette activité posée sous une forme ouverte vise prioritairement à renforcer la maitrise des compétences de résolution de problème. Elle permet de donner sens à la notion de suite et de justifier l'utilisation de formules de sommation.

Scénario :

▪ L'activité plaît : tous les élèves se mettent vite en situation de recherche.

▪ La réalisation sous géogébra d'un empilement de 6 boules n'est pas obligatoire mais c'est un exercice formateur pour entrer dans le problème et pour commencer à conjecturer une conclusion.
Cette réalisation a demandé beaucoup de temps.

▪ La modélisation par une suite géométrique permet d'arriver à l'écriture :

$$2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots$$

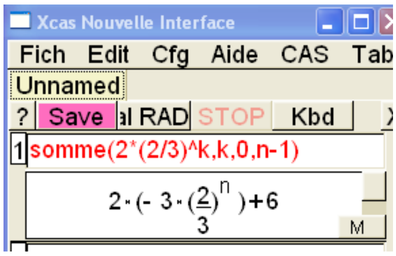
▪ Certains passent à l'écriture $\sum_{k=0}^{n-1} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k$ pour la hauteur de *n* boules.
Avec cette écriture, ils se lancent dans des essais avec Xcas (voir documents ci-dessous)

▪ D'autres élèves ont utilisé la formule $1+b+\ldots+b^n$ pour obtenir :

$$2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

Certains élèves ont eu du mal à parvenir à cette écriture simplifiée.

Le résultat obtenu par Xcas a motivé certains élèves un peu effrayés par l'allure du calcul.



Ces élèves ont terminé en faisant des essais à la calculatrice.

▪ Echanges intéressants sur le calcul exact et le calcul approché (« peut-on arriver à atteindre 6 ou pas ? »).

▪ Dans la phase de mise en commun, on arrive à une approche de la notion de limite avec des discussions vives : « quand le nombre de boules augmente, la hauteur augmente et finira par atteindre les 8 cm », « non, ça augmente toujours mais il y a un plafond » : c'est le mot « plafond » qui a permis de réconcilier tout le monde. Ce plafond égal à 6 est apparu grâce aux calculs approchés effectués par calculatrice ou par XCas mais c'est le professeur qui a dû contraindre les élèves à essayer de tirer des informations de l'écriture :

$6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ ou $6-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ c'est à dire « 6 moins une quantité positive de plus en plus petite ».

Travaux d'élèves :