



Olivier PINSON – groupe TraAM Maths et TICE de l'académie de Nantes – Mai 2012

## « Marche aléatoire » en 2nde

### Compétences mathématiques travaillées ou en lien avec cette activité :

Calcul d'une probabilité à l'aide d'un dénombrement, réalisation d'une simulation à l'aide d'un algorithme.

### Descriptif rapide :

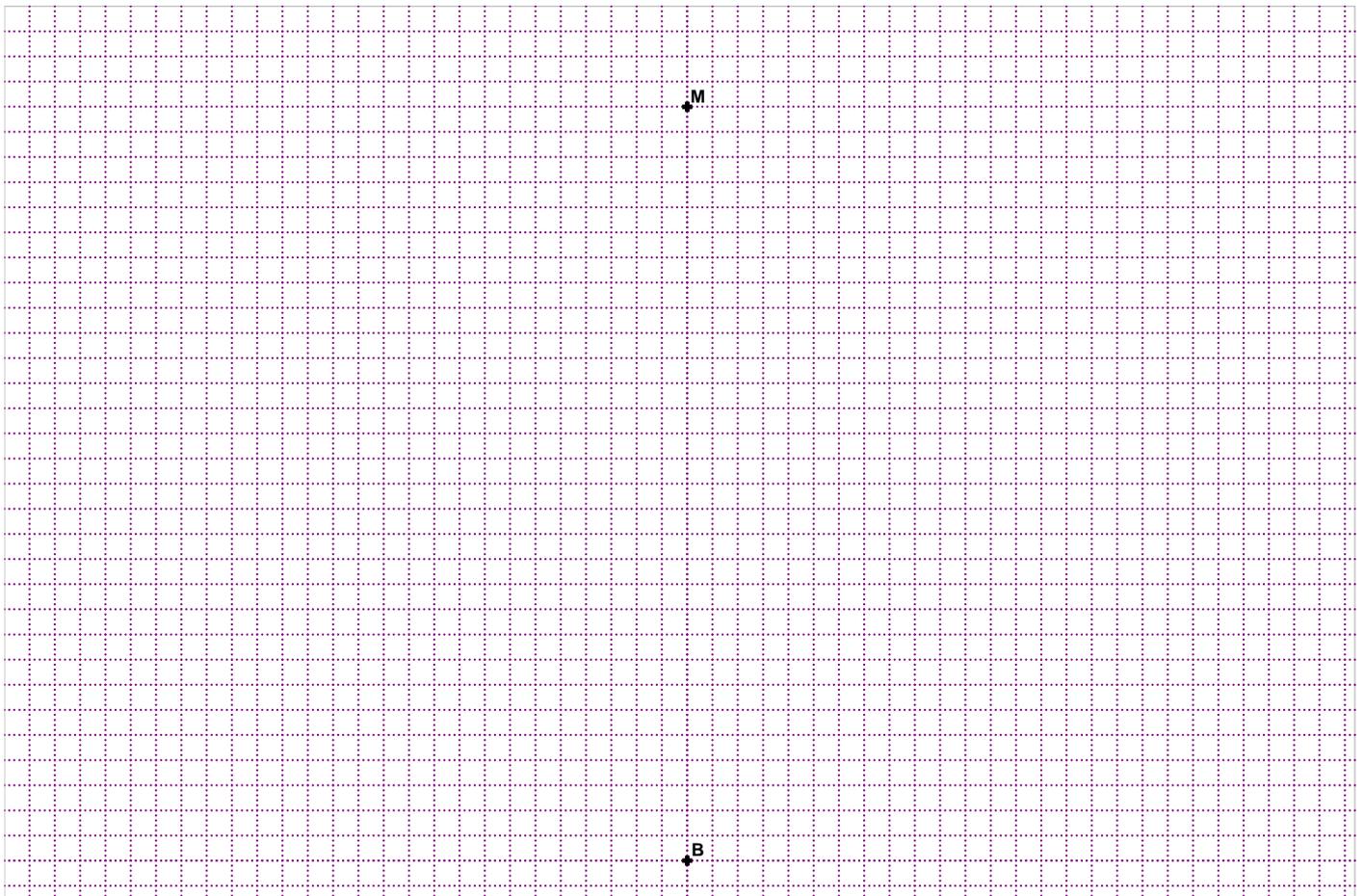
Il s'agit de dénombrer le nombre de cas favorables d'un évènement et le nombre total de cas pour calculer sa probabilité. Il est également possible d'approcher cette probabilité par une fréquence à l'aide d'une simulation sur ordinateur. Cette activité permet de préparer la loi binômiale.

<b>Enoncé de l'exercice</b>	<b>2</b>
Enoncé donné aux élèves	2
Consignes données aux élèves	2
Ce qui a été fait avant	2
<b>Objectifs</b>	<b>3</b>
Textes de référence	3
Analyse des compétences calculatoires travaillées	3
<b>Scénario de mise en œuvre avec quelques travaux d'élèves</b>	<b>4</b>
Les séances de recherche	4

### Énoncé donné aux élèves :

Un homme sort du bar (point B ci-dessous) et veut rentrer chez lui. Sa maison (point M) n'est qu'à 30 pas du bar s'il y va directement. Mais il ne réussit pas à marcher droit. Chaque pas qu'il fait vers l'avant (en direction de sa maison) est soit vers la droite (en suivant la diagonale d'un carreau) soit vers la gauche. La probabilité qu'il se déplace vers la droite est égale à la probabilité de se déplacer vers la gauche : « une chance sur deux » c'est-à-dire 0,5.

Déterminer la probabilité que cet ivrogne atteigne sa maison après avoir effectué 30 pas.



### Consignes données aux élèves

Après un temps laissé pour la lecture de l'énoncé, le point est fait en classe entière et on précise aux élèves la consigne suivante « Pour résoudre ce problème, toutes les méthodes sont autorisées : faire des essais "à la main", utiliser des instruments de calcul - calculatrices, ordinateurs ... »

### Ce qui a été fait avant

Les élèves ont déjà calculé des probabilités en dénombrant le nombre de cas favorables et le nombre de cas total. Des algorithmes de simulations à l'aide du logiciel « xcas » ont également été réalisés comme par exemple « n lancers d'un dé » ou « n lancers de deux dés ».

## Objectifs

Cette activité posée sous une forme ouverte (ou tâche complexe) vise prioritairement à renforcer la maîtrise des compétences de résolution de problème.

Elle permet de donner sens au calcul de probabilités et de justifier l'utilisation d'un outil de dénombrement ou d'un outil de simulation.

## Textes de référence.

### **B.O.** Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009

#### Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes

*dans le cadre des probabilités*, rendre les élèves capables :

- ♦ d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes);
- ♦ de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples;
- ♦ d'interpréter des événements de manière ensembliste;
- ♦ de mener à bien des calculs de probabilité.

Les situations étudiées concernent des expériences à une ou plusieurs épreuves.

- ♦ La répétition d'expériences aléatoires peut donner lieu à l'écriture d'algorithmes (marches aléatoires).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<b>Probabilité sur un ensemble fini</b>  Probabilité d'un événement.  Réunion et intersection de deux événements, formule: $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B).$	<ul style="list-style-type: none"><li>♦ Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité.</li><li>♦ Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.</li> <li>♦ Connaître et exploiter cette formule.</li></ul>	<p>La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.</p> <p>Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.</p>

## Algorithmique (objectifs pour le lycée)

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés :

- ♦ à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- ♦ à en réaliser quelques uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- ♦ à interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

## Analyse des compétences mathématiques travaillées

L'objectif est d'élaborer un outil de dénombrement efficace.

La réalisation d'un algorithme permettant de simuler un grand nombre d'expériences est également un enjeu de la classe de seconde.

## Scénario

Testé en classe de 2<sup>nde</sup> : 35 élèves – classe entière.

En salle de cours – 36 ordinateurs portables disponibles dans la salle.

### Séance 1 (55 min)

Après 25 minutes de recherche individuelle, une mise en commun des premières idées est réalisée.

Celle-ci permet de faire émerger certaines idées fausses comme par exemple « l'ivrogne est certain d'atteindre sa maison puisque à chaque pas il a une chance sur deux d'aller soit à droite soit à gauche ».

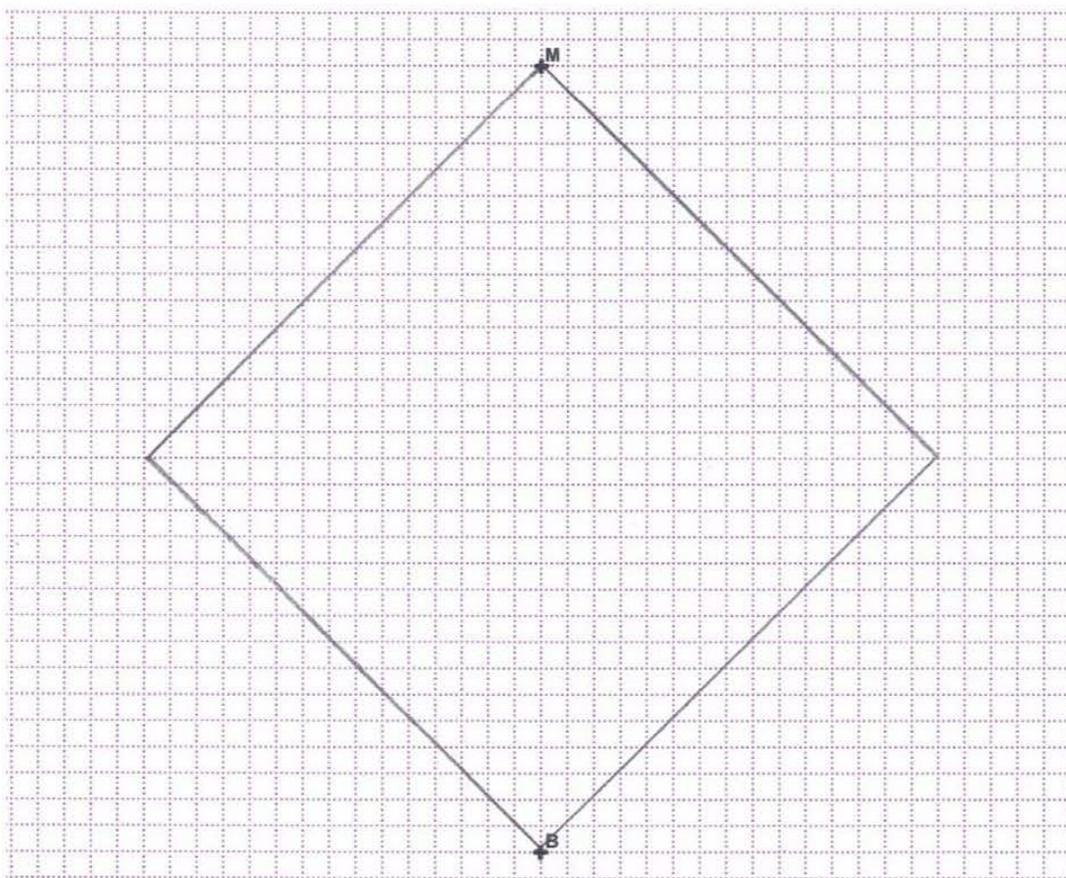
Beaucoup d'élèves (presque tous) ont dessiné des chemins possibles sur leur feuille : certains chemins permettent à « l'ivrogne » d'atteindre sa maison, d'autres pas.

Le fait que le nombre total de chemins est égal à  $2^{30}$  apparaît assez vite et est bien admise par la classe.

Il apparaît également assez vite que le nombre de chemins qui permettent à « l'ivrogne » d'atteindre sa maison est très grand.

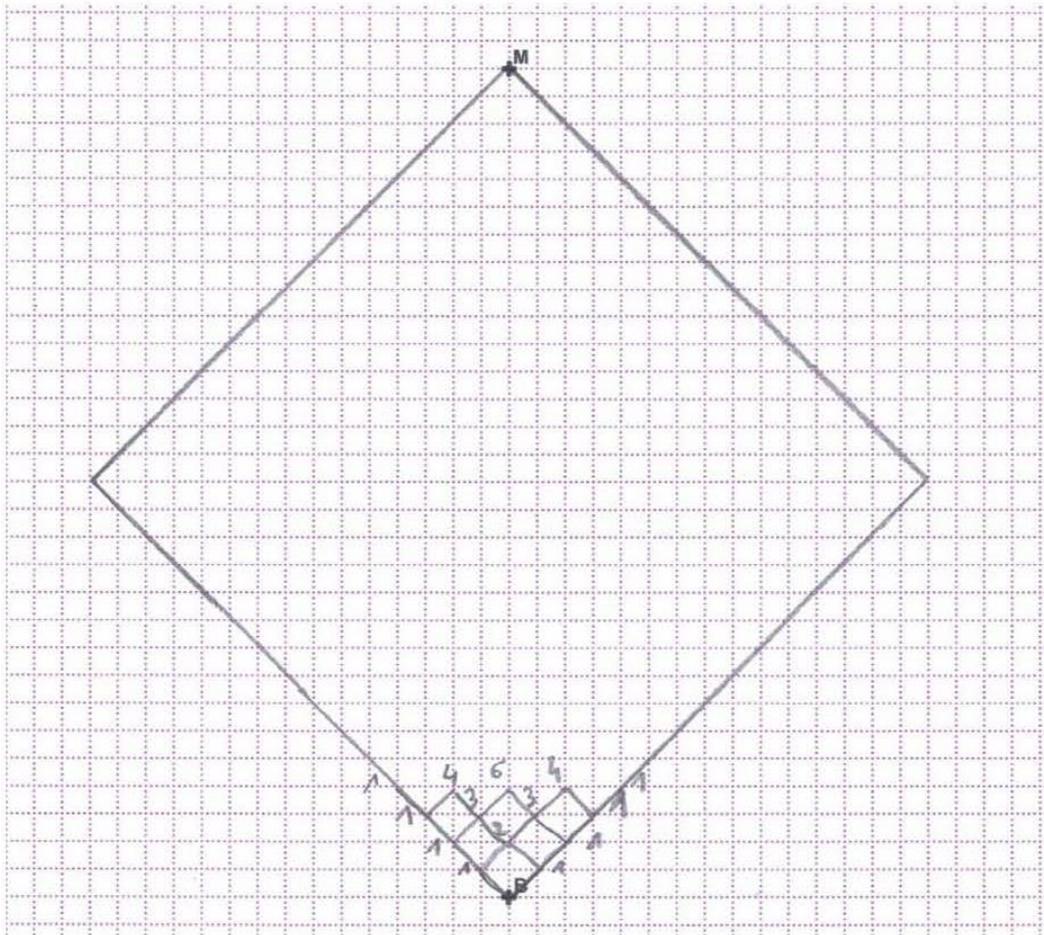
Quelques élèves affirment que le nombre de pas à droite doit être égal au nombre de pas à gauche.

Un élève vient au tableau réaliser le dessin suivant :



et affirme que les chemins favorables sont nécessairement dans ce carré.

Un autre élève propose alors de compter les chemins favorables et vient au tableau compléter le dessin précédent :



Les élèves sont conquis par ce procédé de dénombrement parce qu'ils comprennent très vite comment facilement passer d'une ligne à la suivante ... mais ils réalisent l'ampleur de la tâche à effectuer.

Je propose alors d'utiliser un autre moyen pour compter ces chemins en faisant remarquer l'automatisme du calcul. Plusieurs élèves proposent alors d'utiliser le tableur.

Une discussion s'engage alors pour décider d'une présentation possible. Après de brefs échanges, chaque élève prend un ordinateur et comme la réalisation de la feuille de calcul comme ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	M															1
2																1
3																1
4																1
5																1
6																1
7																1
8																1
9																1
10																1
11																1
12																1
13																1
14																1
15																1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B
17																
18																
19																

Quelques élèves, qui avaient proposé dès le début de la discussion collective de réaliser un programme simulant cette expérience aléatoire, se mettent en petits groupes et commencent l'écriture de leur programme sur « xcas ».

## Séance 2 (55 min)

Chaque élève reprend sa recherche là où il l'avait laissée : les uns sur tableur, les autres sur « xcas ».  
Rapidement, les élèves aboutissent au tableau suivant sur le tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	155117520	77558760	37442160	17383860	7726160	3268760	1307504	490314	170544	54264	15504	3876	816	136	16	1
2	77558760	40116600	20058300	9657700	4457400	1961256	817190	319770	116280	38760	11628	3060	680	120	15	1
3	37442160	20058300	10400600	5200300	2496144	1144066	497420	203490	77520	27132	8568	2380	560	105	14	1
4	17383860	9657700	5200300	2704156	1352078	646646	293930	125970	50388	18564	6188	1820	455	91	13	1
5	7726160	4457400	2496144	1352078	705432	352716	167960	75582	31824	12376	4368	1365	364	78	12	1
6	3268760	1961256	1144066	646646	352716	184756	92378	43758	19448	8008	3003	1001	286	66	11	1
7	1307504	817190	497420	293930	167960	92378	48620	24310	11440	5005	2002	715	220	55	10	1
8	490314	319770	203490	125970	75582	43758	24310	12870	6435	3003	1287	495	165	45	9	1
9	170544	116280	77520	50388	31824	19448	11440	6435	3432	1716	792	330	120	36	8	1
10	54264	38760	27132	18564	12376	8008	5005	3003	1716	924	462	210	84	28	7	1
11	15504	11628	8568	6188	4368	3003	2002	1287	792	462	252	126	56	21	6	1
12	3876	3060	2380	1820	1365	1001	715	495	330	210	126	70	35	15	5	1
13	816	680	560	455	364	286	220	165	120	84	56	35	20	10	4	1
14	136	120	105	91	78	66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1
15	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B
17																
18																

Les deux groupes qui se sont engagés dans l'écriture d'un programme aboutissent, avec mon aide, à deux algorithmes différents :

### VERSION 1

```
1 Prog Edit Ajouter | 14 | nxt |
ivrogne() := {
nombre_de_pas:=0;
pas_à_droite:=0;
pas_à_gauche:=0;
tantque nombre_de_pas<30 faire
nombre_de_pas:=nombre_de_pas+1;
résultat:=hasard(2);
si résultat=0 alors pas_à_droite:=pas_à_droite+1;
fsi;
ftantque;
si pas_à_droite=15 alors afficher("oui")
sinon afficher("non");
fsi;
};;
```

Ce programme réalise une seule simulation d'un chemin possible à la fois et nécessite donc que chaque élève du groupe réalise un grand nombre de simulations (100 chacun ...). La mise en commun des fréquences favorables des 4 élèves permet d'obtenir sur 400 simulations une approximation de la probabilité recherchée.

