ACADÉMIE
DE NANTES

Liberté
Égalité
Fraternité

BILAN DU STAGE MATHC2+
DU 2 AU 5 NOVEMBRE 2021 À ANGERS

MathC2+

Les enseignants-chercheurs en mathématiques de l'Université d'Angers, Étienne Mann et Daniel Naie, ont organisé un stage de mathématiques d'initiation à la recherche sur la "théorie du chaos" pendant les vacances de la Toussaint, du mardi 2 novembre au vendredi 5 novembre, dans les locaux de l'Université d'Angers.
Ce stage s'adressait aux élèves inscrits en enseignement de spécialité mathématiques en classe de terminale et intéressés par les mathématiques.
Vingt-sept élèves (12 filles, 15 garçons) ont participé au stage, provenant de douze lycées angevins ou en périphérie angevine, de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat. Les élèves ont été informés de ce stage par leur professeur de mathématiques ou leur professeur principal. Des informations complémentaires et le détail du contenu du stage ont également été transmises par Étienne Mann et Daniel Naie. L'inspection pédagogique régionale de mathématiques a communiqué auprès des enseignants de mathématiques afin de valoriser cette action et de susciter également les inscriptions.

Étienne Mann et Daniel Naie se sont appuyés sur un support numérique pour que les stagiaires aient une idée visuelle de la théorie du chaos.

Le stage s'est basé sur un problème général mathématique présenté aux stagiaires :

Problème présenté : étude d'une suite (u_n) définie par récurrence par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f_{\alpha}(u_n)$ où la fonction f_{α} est définie par : $f_{\alpha}(x) =\propto x(1-x)$ avec $\alpha \in [0, 4]$.

Le mardi matin, les participants ont reçu sept situations mathématiques (voir annexe : pages 1, 2, 3 et 4) à chercher durant le stage. Ils ont résolu ces situations par groupe mardi et vendredi, et en exposant leurs solutions devant les camarades le vendredi.

Détail du planning du stage

(1) Les quatre matinées de trois heures chacune ont été consacrées à :
- une séance de cours sur les suites,
- une séance de recherche de problèmes par groupe de quatre ou cinq stagiaires encadrés par les chercheurs.
- une séance de travaux pratiques (mobilisation de GeoGebra et d'un curseur afin de visualiser le changement de comportement de la suite selon le paramètre α)
- une séance de recherche de problèmes par groupe de quatre ou cinq stagiaires avec retour sur les travaux pratiques (fractale et chaos) et l'exposé oral des recherches des stagiaires par eux-mêmes.

(2) Le mardi après-midi : intervention d'un doctorant pour expliquer le sujet de sa thèse.
(3) Le mercredi après-midi : rapide tour d'horizon sur l'orientation dans le supérieur par Étienne Mann : classes préparatoires aux grandes écoles, classes préparatoires intégrées, cursus de double licence, licence.
(4) Le jeudi après-midi : présentation des algorithmes évolutifs par un chercheur en informatique.

Vous trouverez le programme au jour le jour détaillé par Étienne Mann et Daniel Naie (voir annexe : page 5).

Les stagiaires ont apprécié les contenus du stage (théoriques et pratiques, avec mobilisation de l'outil numérique) et ont loué la qualité des interventions, autant scientifiques (mathématiques et informatique) que dans la projection des différents parcours dans le supérieur.

Nous remercions Étienne Mann et Daniel Naie, ainsi que les autres intervenants du stage, pour leur engagement, leur accompagnement et la réussite de ce stage qui a ouvert de nombreuses perspectives aux élèves qui en ont bénéficié.

Quelques images du stage

ANNEXES

Problèmes

1. En découpant le plan et l'espace

1) Quel est le nombre maximal de parties obtenues en traçant n droites dans le plan ? Même question en remplaçant les droites par des cercles.

2) Quel est le nombre maximal de parties obtenues en traçant n plans dans l'espace ? Même question en remplaçant les plans par des sphères. Par exemple, en combien de parties peut être divisé l'espace à l'aide de 5 sphères ?

2. En découpant un polygone convexe

On considère un polygone convexe à n côtés.

1) En supposant qu'il n'existe pas trois diagonales du polygone qui soient concourantes, en combien de morceaux est divisé celui-ci si on trace toutes ses diagonales ?

2) De combien de façons différentes peut-on découper un hexagone (heptagone, octogone) en triangles en utilisant des diagonales qui ne s'intersectent pas à l'intérieur du polygone ?

3) De combien de façons différentes peut-on découper un polygone à n côtés en triangles en utilisant des diagonales qui ne s'intersectent pas à l'intérieur du polygone ?

3. Des cordes et des cercles

On considère 20 points fixés sur un cercle. On dessine dix cordes qui relient tous ces points deux par deux. On appelle une telle configuration *libre* s'il n'y a pas deux cordes qui se coupent à l'intérieur du cercle. Combien de configurations libres existe-t-il ?

Résoudre le problème dans le cas général quand il y a $2n$ points et n cordes.

On pourra commencer par regarder un cas plus simple : huit points et quatre cordes, ou même plus simple encore… Y a-t-il une liaison avec le problème précédent ?

4. Le nombre de serpents de longueur 12

Soit n un entier strictement positif. On appelle *permutation* des nombres 1, 2, …, n toute fonction bijective

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

On remarque que les valeurs de la fonction sont les mêmes nombres lus dans un ordre différent. Par exemple, la permutation

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

définie par

$$1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 5, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 4, \quad 5 \mapsto 1$$

est notée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les “ nombres lus dans un ordre différent ” apparaissent sur la deuxième ligne du tableau représentant la permutation.

Une permutation f est appelée un *serpent* si $f(1) < f(2) > f(3) < f(4) > \cdots$. Par exemple la permutation des nombres $\{1, \ldots, 5\}$ ci-dessus est un serpent. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ne le sont pas. On se propose de trouver le nombre de serpents de longueur 12.

5. L’empilement

On dispose d’un nombre infini de planchettes en bois (parallélépipèdes rectangulaires) ayant toutes les mêmes dimensions ; on supposera que la longueur vaut un (décimètre), $L = 1$. La largeur et l’épaisseur ne joueront aucun rôle par la suite.

Pour chaque nombre naturel n, on réalise des empilements formés de $n+1$ planchettes, P_0, P_1, $\ldots$, P_n. Chaque planchette P_k dépasse l’extrémité droite de P_{k-1}, la planchette précédente, de x_k (décimètres). Voir Fig. 1.

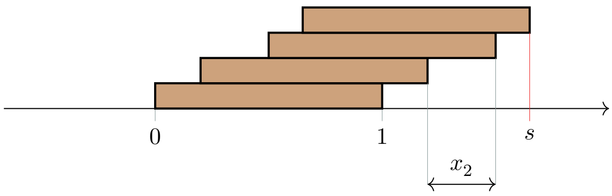

Figure 1: Un empilement avec quatre planchettes, c’est-à-dire pour $n = 3$.

On veut savoir si les différentes valeurs possibles de $s = s_n$ (voir Fig. 1), quand n varie en considérant tous les empilements possibles, sont bornées supérieurement ?

La question porte sur tout nombre de planchettes et sur tout empilement réalisé avec ce nombre de planchettes.

6 − ε. Suites arithmétiques

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite arithmétique $(n\alpha)_{n\geq 0}$. On veut comprendre l’évolution des parties fractionnaires de ses termes, c’est-à-dire on pose, pour tout $n > 0$,

$$x_n = \{n\alpha\}.$$

Que peut-on dire des images de cette suite ? Représentent-elles un ensemble fini ou infini ? S’il est infini, est-il dense dans $[0, 1]$?

6. Les puissances de 2

On considère la suite $a_n = 2a_{n-1}$ avec $a_0 = 1$. Montrer que pour tout entier $M = d_r \dots d_1 d_0$ (avec d_j, $0 \leq j \leq r$, ses chiffres en écriture décimales), il existe un terme de la suite qui commence avec tous les chiffres de M.

Par exemple, si $M = 102$, alors $a_{10} = 2^{10} = \underline{102}4$.

7. Périmètre et aire

Est-il possible de construire une forme géométrique au périmètre infini et à l'aire finie ? Pourrait-on, à partir d'une figure, transformer ses côtés de manière à augmenter son périmètre sans augmenter son aire (voire sans la modifier) ?

8. La série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$

On se propose de comprendre le comportement de la suite $(x_n)_{n>0}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

On veut montrer d'abord que cette suite converge et, par la suite, calculer explicitement sa limite.

Par définition,

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right).$$

Quelques suggestions

1) Étudier la monotonie et montrer que $(x_n)_n$ est bornée.
2) Pour le calcul explicite de la limite :
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.
- Utiliser le binôme de Newton et les nombres complexes pour en déduire l'identité

$$\begin{aligned}\sin(n\alpha) &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1}\alpha \, \cos^{n-2k-1}\alpha \\ &= \sin^n\alpha \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \operatorname{cotan}^{n-2k-1}\alpha.\end{aligned}$$

- Pour $n = 2m+1$, en déduire que les racines de l'équation

$$\binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots = 0$$

sont

$$\operatorname{cotan}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{3\pi}{2m+1}, \quad \dots, \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{m\pi}{2m+1}.$$

- En utilisant la relation entre la somme des racines et les coefficients d'un polynôme, obtenir la somme ci-dessous.

$$\operatorname{cotan}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cotan}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{cotan}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \cdots + \operatorname{cotan}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \ldots$$

  De plus, comme $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotan}^2 \alpha$, où $\sec \alpha = 1/\sin \alpha$, on a

$$\sec^2 \frac{\pi}{2m+1} + \sec^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \sec^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \cdots + \sec^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \ldots$$

- Justifier l'inégalité $\sin x < x < \tan x$ pour tout $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et conclure.

Lycée- **2021-2022**
Théorie du chaos
—— Etienne
Mann Daniel
Naie
etienne.mann@univ-angers.fr
daniel.naie@univ-angers.fr

PROGRAMME: DU 2 AU 5 NOVEMBRE À ANGERS

Mardi 2 novembre

9h- 9h30 Salle I001. Accueil

9h30- 12h20 Salle I 001. Nous travaillerons sur les suites récurrentes et leurs limites.

14h-15h30 Salle I 005. Deux doctorants (François Bernard et Eunice Okomé Obiang) vous présen- teront chacun un exposé de vulgarisation de math.

Mercredi 3 novembre

9h30 -12h20 Salle I 001. Nous étudierons des problèmes géométriques et de combinatoire en petit groupe de 3/4 avec une mise en commun à la fin de la séance.

14h -15h Salle I 001. Orientation dans le supérieur.

Jeudi 4 novembre

9h30-12h20 Salle L108 TP informatique sur la vidéo du chaos.

14h-15h30 Salle H002. Exposé d'Adrien Goëffon sur les " algorithmes évolutionnaires" en informatique.

Vendredi 5 novembre

9h30-12h20 Salle I 001. Retour sur le TP avec explotation des résultats.