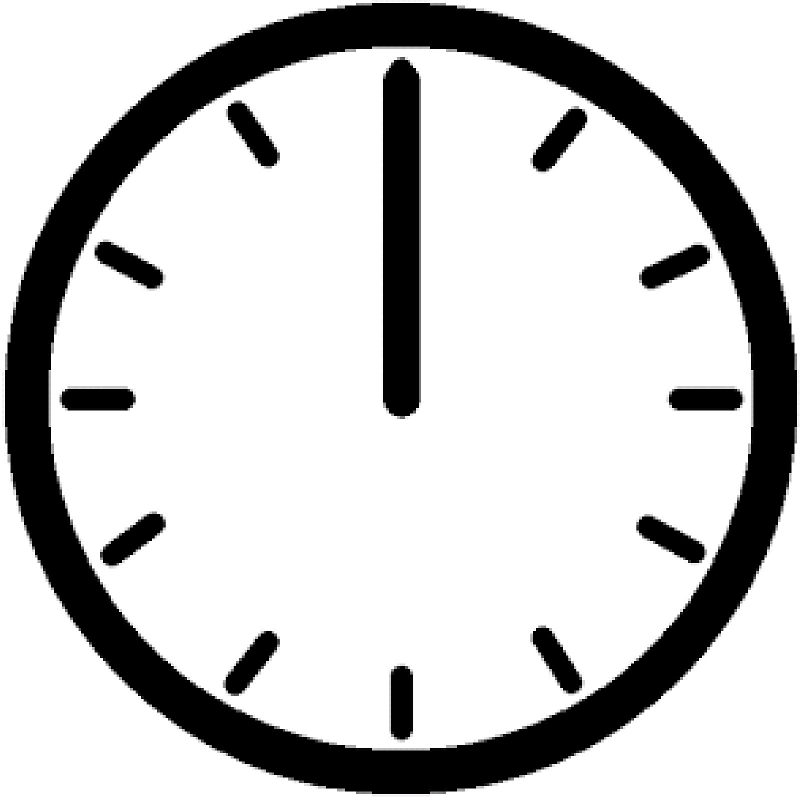
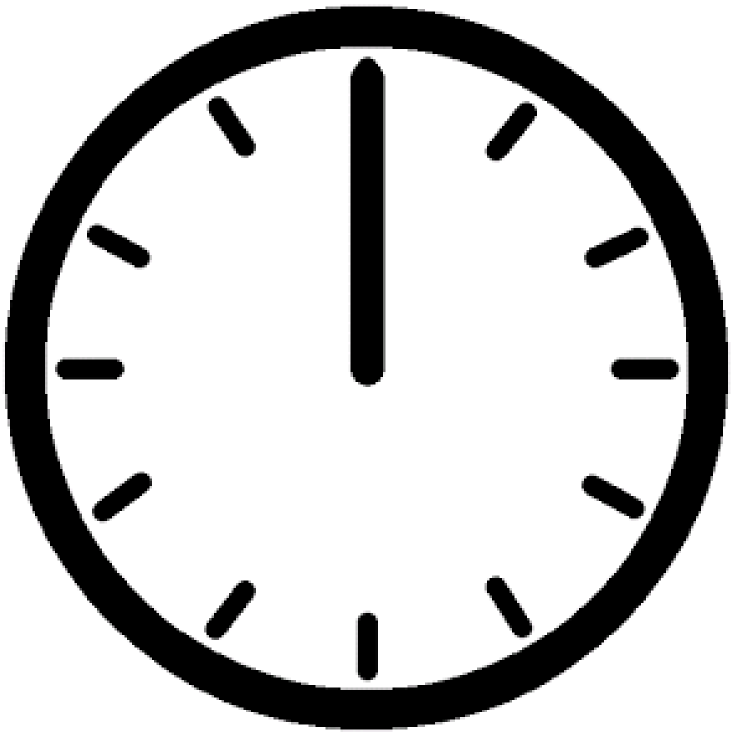


Raphaël, , Raphaël,

Quelle heure est-il lorsque les aiguilles d'une horloge sont superposées ?

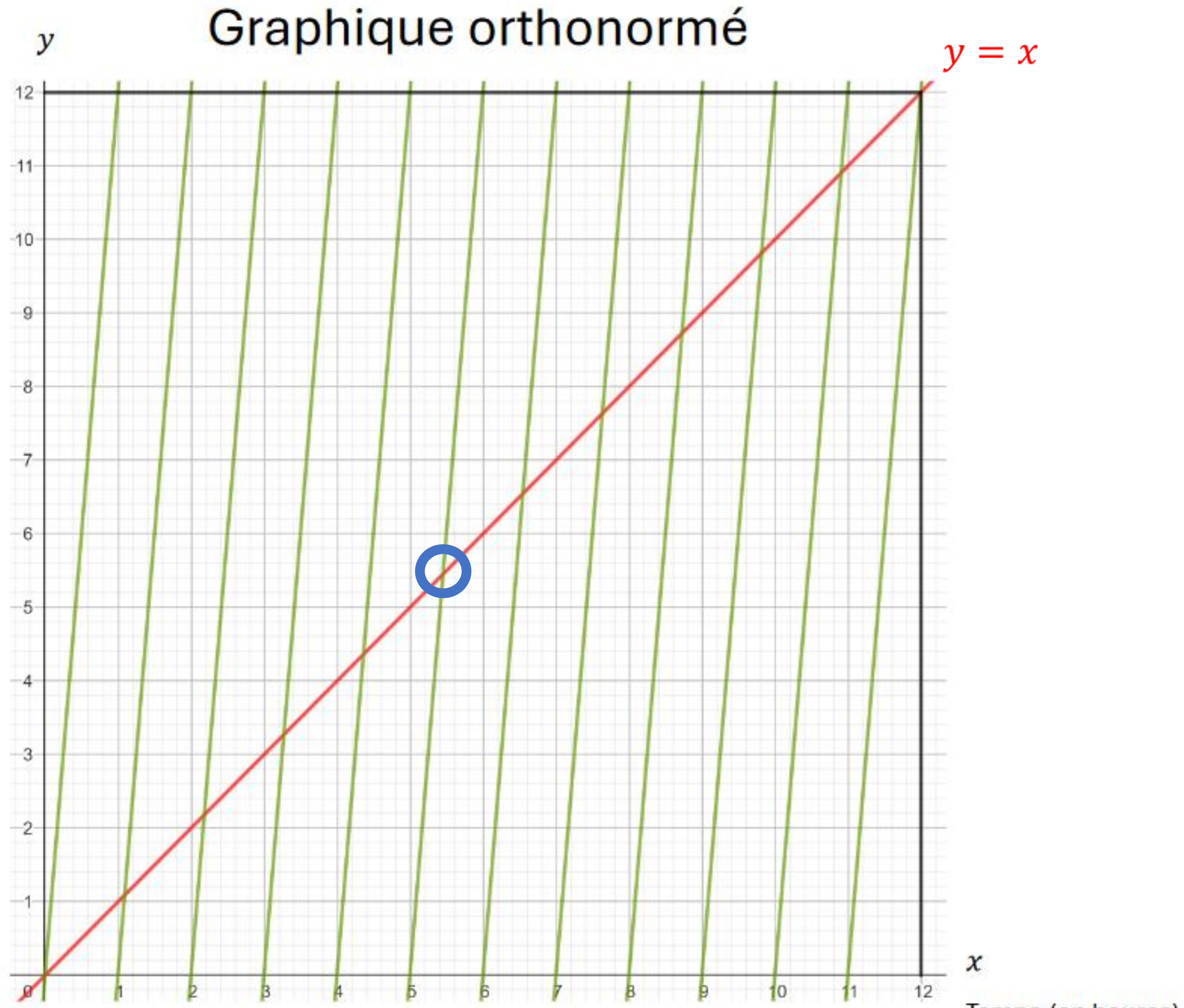


Plan

- Approche graphique
- Approche trigonométrique
- Construction d'une suite
- Adaptation à d'autres problèmes d'horloges
- Programme Python
- Elargissement : Eclipses

Approche graphique

Place sur l'horloge (en heures)



Aiguille des heures

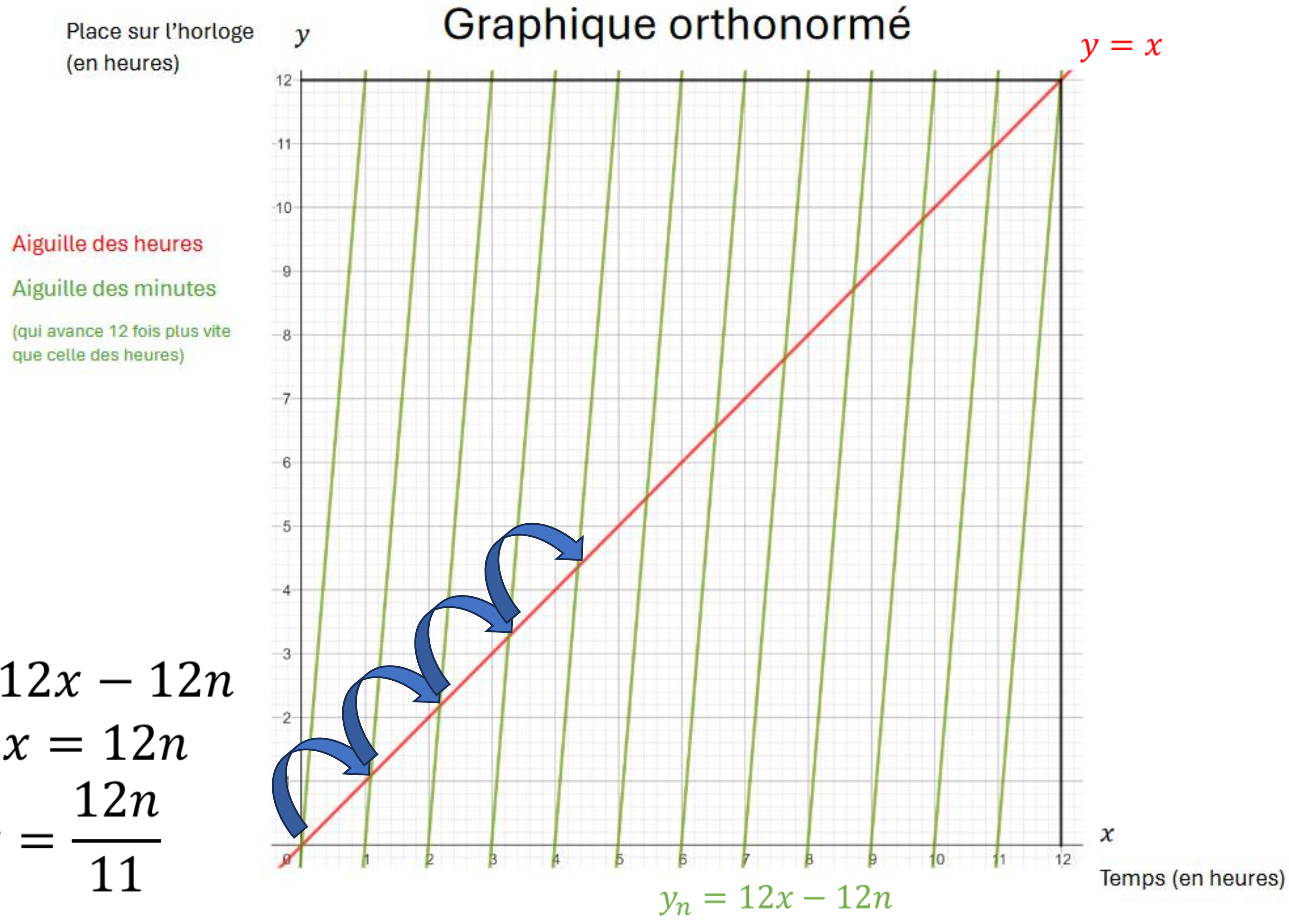
Aiguille des minutes

(qui avance 12 fois plus vite que celle des heures)

$$y = y_5$$
$$x = 12x - 60$$
$$11x = 60$$
$$x = \frac{60}{11}$$

$y_0 = 12x$ $y_1 = 12x - 12$ $y_n = 12x - 12n$

Construction d'une suite



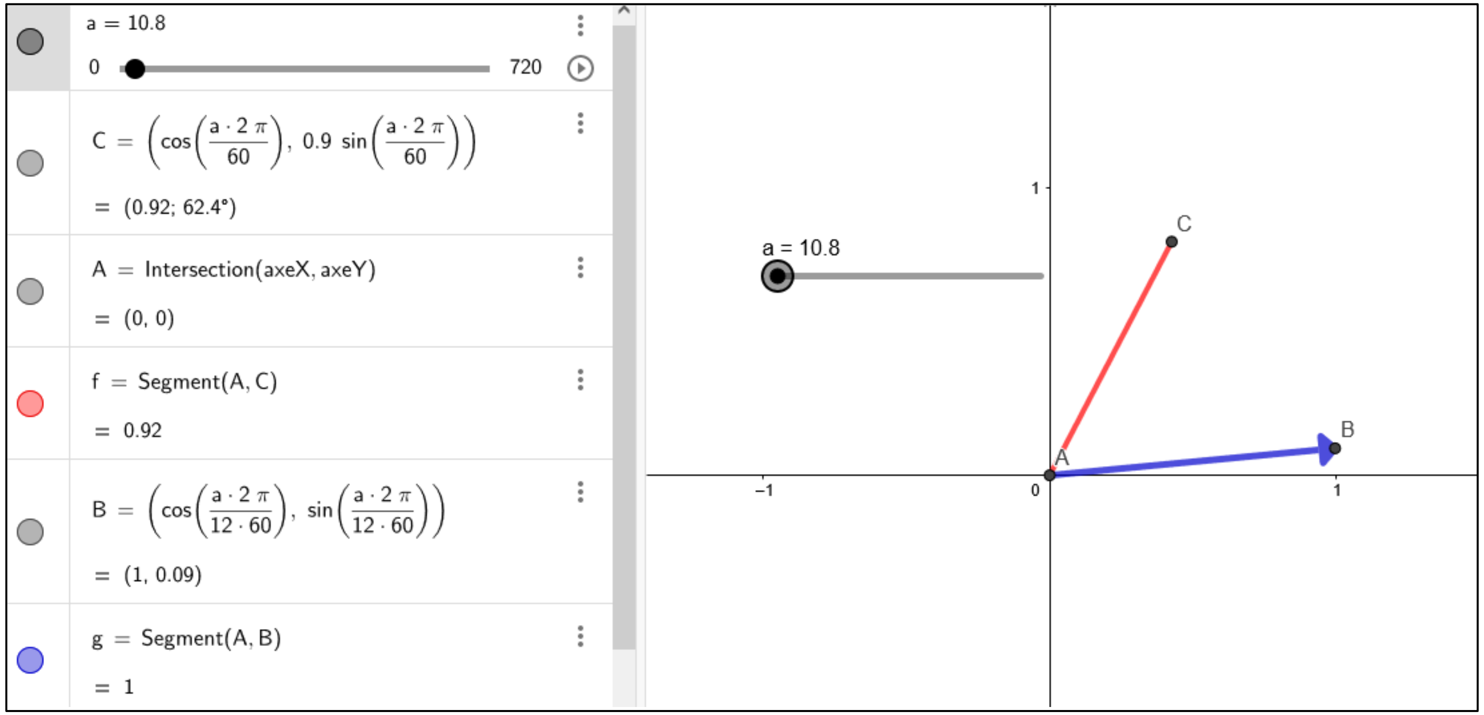
$$x = 12x - 12n$$

$$11x = 12n$$

$$x = \frac{12n}{11}$$

Approche
trigonométrique

Modèle d'une horloge à l'aide de coordonnées de points :



Système :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{a \cdot 2\pi}{60}\right) = \cos\left(\frac{a \cdot 2\pi}{12 \cdot 60}\right) \\ \sin\left(\frac{a \cdot 2\pi}{60}\right) = \sin\left(\frac{a \cdot 2\pi}{12 \cdot 60}\right) \end{cases}$$

Solutions :

$a = \frac{12n}{11}$ pour a en Heures

$a = 60 \times \frac{12n}{11}$ pour a en Minutes

Construction d'une suite

Suite arithmétique de raison $r = \frac{12}{11}$ et de premier terme $u_0 = 0$ heure :

$$u_n = \frac{12n}{11}$$

Avec n l'heure de croisement comprise entre 0 et 11

Exemple : pour l'heure $n = 7$, le croisement est à $u_7 = \frac{12}{11} \times 7 = \frac{84}{11}$ heures

Or

$$\frac{84}{11} = \frac{7 \times 11 + 7}{11} = 7 + \frac{7}{11}$$

Soit 7 heures et $\frac{7}{11}$ d'heure.

Or

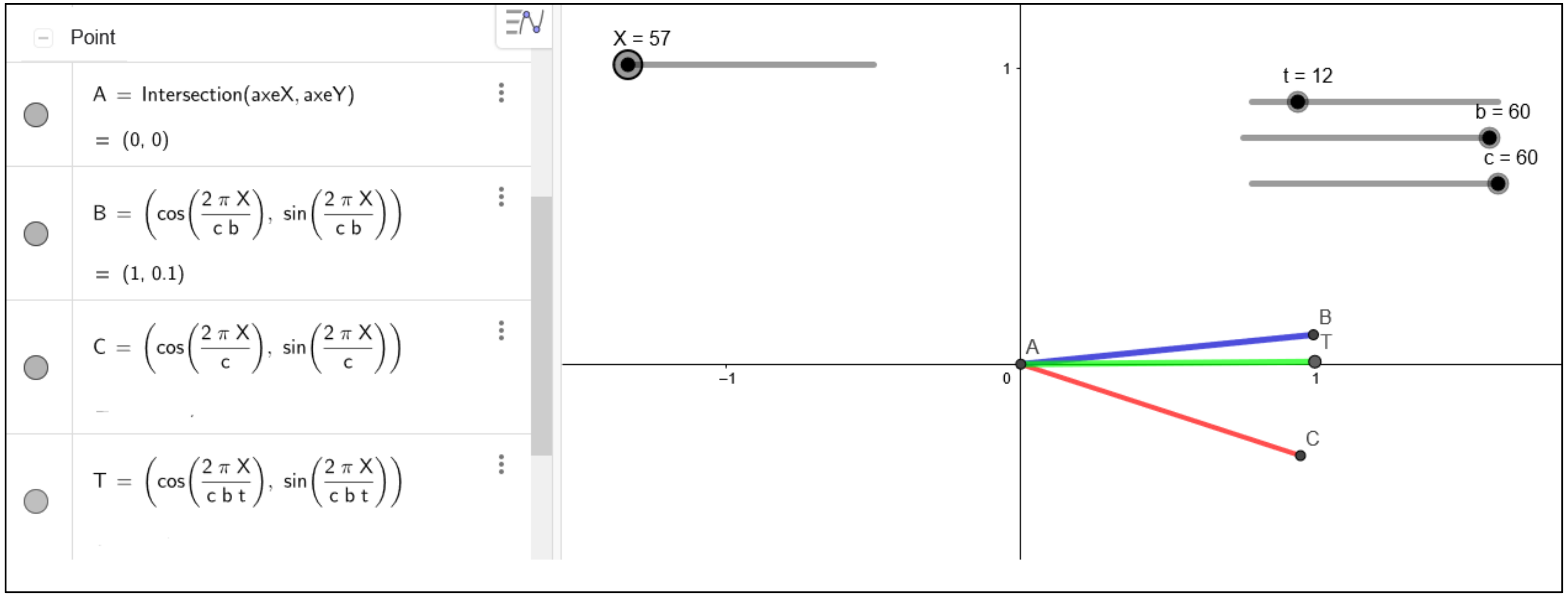
$$\frac{7}{11} \times 60 = \frac{420}{11} = \frac{38 \times 11 + 2}{11} = 38 + \frac{2}{11}$$

Le croisement est donc à environ 7 heures et 38 minutes.

	00:00:00
+ 01:05:27	01:05:27
+ 01:05:27	02:10:54
+ 01:05:27	03:16:21
+ 01:05:27	04:21:49
	05:27:16
	06:32:43
	07:38:10
	08:43:38
	09:49:05
	10:54:32
	12:00:00

Programme Python

Modèle d'une horloge à l'aide de coordonnées de points :



Système :

$$
\begin{cases}
\cos\left(\frac{2\pi X}{c}\right) = \cos\left(\frac{2\pi X}{c\,b}\right) \\
\cos\left(\frac{2\pi X}{c}\right) = \cos\left(\frac{2\pi X}{c\,b\,t}\right) \\
\sin\left(\frac{2\pi X}{c}\right) = \sin\left(\frac{2\pi X}{c\,b}\right) \\
\sin\left(\frac{2\pi X}{c}\right) = \sin\left(\frac{2\pi X}{c\,b\,t}\right)
\end{cases}
$$

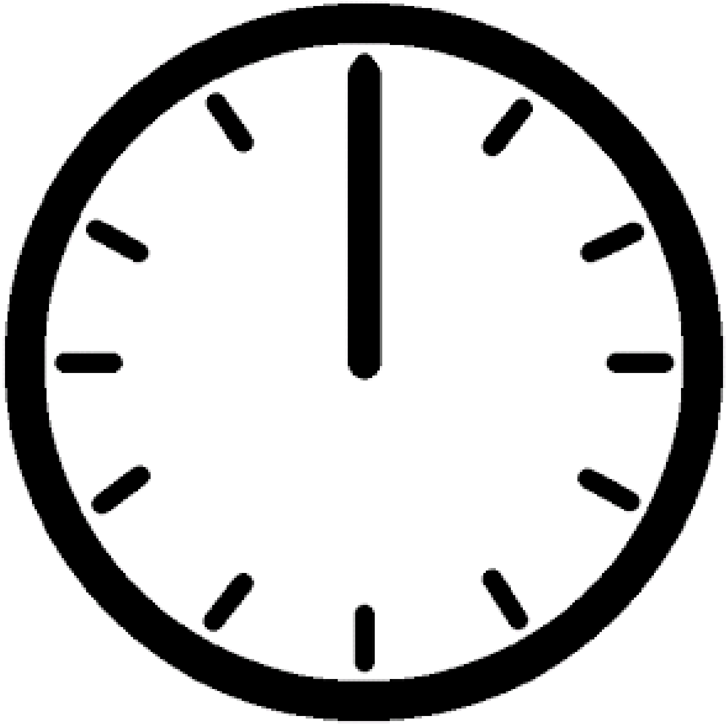
Solutions :

```
for i in range(b):
    x=(i*c*b*t)/(b-1)
```

```
averifier = (i*(b*t-1))/(b-1)
if  averifier.is_integer():
```

Autres problèmes d'horloge

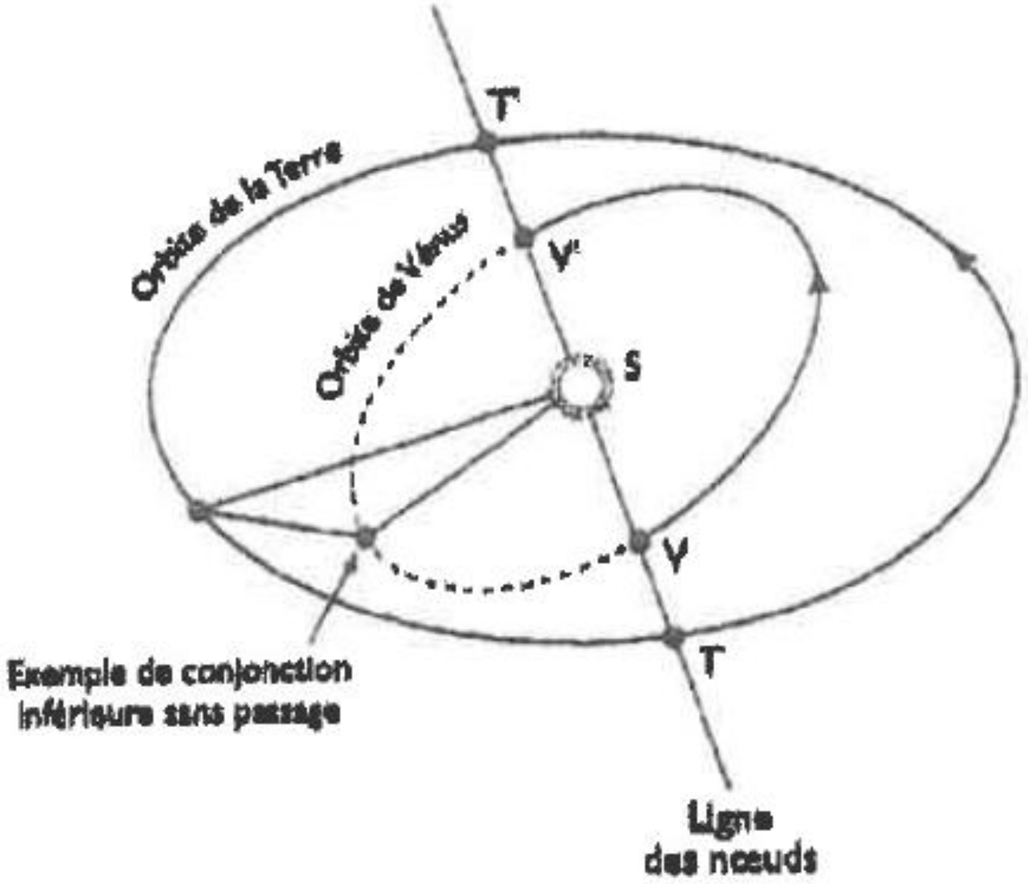
- Quelle heure est-il lorsque les deux aiguilles sont opposées, forment un angle droit ?
- Si la journée n'est plus découpée de la même façon ?



$$T_{Terre} = 365{,}25\ jours = 31\ 557\ 600\ s$$
$$T_{Saturne} = 4332{,}59\ jours = 374\ 335\ 776\ s$$
$$\frac{T_{Saturne}}{T_{Terre}} \approx \frac{59}{5}$$

Elargissement: Eclipses

$$\begin{cases} y = 5x \\ y_n = 59x - 59n \end{cases}$$



Problèmes rencontrés :

- Les planètes ne sont pas forcément sur le même plan
- Les trajectoires des planètes ne sont pas exactement circulaires
- $\Longrightarrow$ Leur vitesse n'est pas forcément constante