

Modéliser en mathématiques

Stéphane PERCOT - groupe de recherche « mathématiques et numérique » de l'académie de Nantes - TraAM 2019-2020

« Record du monde de la tasse à café »

Cycle 4 – 2nde GT

Testée dans deux classes de 4^{ème} sur un temps de 1h45



Compétences mathématiques en lien avec cette activité :

Chercher - Modéliser – Calculer – Raisonner

Descriptif rapide :

Cette activité repose sur l'idée d'un groupe d'employés d'un café américain souhaitant battre le record du monde de **la plus grande tasse à café**. Les 2 extraits **vidéo** et les données fournis permettent d'**estimer** puis de **calculer précisément** la capacité de cette tasse géante. La manipulation en classe d'une vraie tasse permet de faire des comparaisons, de **calculer des proportions** et manipuler différentes unités des grandeurs physiques utilisées (**capacités, volumes, débits**).

1. La problématique de cette activité	2
Énoncé et consignes donnés aux élèves	2
2. Modéliser avec cette activité	3
Le modèle choisi par les élèves	3
3. Scénario de mise en œuvre de cette activité	4
Ce qui a été fait avant	4
Déroulement de la séquence	4
Ce qui a été fait après : la validation du modèle des élèves	11
4. Conclusions autour de la modélisation sur la tasse à café :	13

La problématique de cette activité

Enoncé et consignes donnés aux élèves

Une vidéo (sans parole) de 58 secondes est présentée aux élèves :

Cliquez sur la photo ci-dessous pour démarrer la vidéo (accès Internet nécessaire)



http://www.dailymotion.com/video/x1739uq_record-de-la-plus-grande-tasse-a-cafe-partie-1_school

Cette vidéo présente la construction d'une tasse à café géante par un groupe d'employés d'un café américain qui souhaitent battre le record du monde de la plus grande tasse à café.

Cette vidéo ne donne pas exactement (dans un premier temps) les dimensions précises de cette immense tasse. De cette vidéo, on peut dégager la problématique suivante :

Mais quelle est la capacité de cette tasse géante ?

Sur la table des élèves, je dépose des tasses à café « normale ». Cette tasse, dont la forme est très proche de la géante, peut être manipulée, mesurée par les élèves. Une seconde problématique peut être dégagée :

Combien de petites tasses peut-on remplir avec le contenu de la tasse géante ?

Cette problématique est reformulée avec certains élèves :

Combien de petites tasses doit-on vider dans la grande pour la remplir ?



2. Modéliser avec cette activité

Le modèle choisi par les élèves :

La plupart des groupes vont choisir de **considérer les deux tasses comme des cylindres parfaits**. Cette modélisation a l'avantage de les placer dans un contexte mathématique abordable et leur permettant des calculs (potentiellement) maîtrisés.

Les élèves vont confronter leur modèle avec la démarche d'un professeur de Sciences physiques pour valider ou invalider leur résultat.

Connaissances et compétences du socle commun développées dans cette activité

Compétence 1 - La maîtrise de la langue française

Lire - Comprendre un énoncé, une consigne

Ecrire - Rédiger un texte bref, cohérent et ponctué, en réponse à une question ou à partir de consignes données

Compétence 3 - Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique

Savoir utiliser des connaissances et des compétences mathématiques

D2 : Nombres et calculs

D3 : Géométrie

D4 : Grandeurs et mesures

Pratiquer une démarche scientifique et technologique, résoudre des problèmes

C1 : Rechercher et organiser l'information.

C2 : Calculer, mesurer, appliquer des consignes.

C3 : Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer.

C4 : Communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.

Compétence 4 - La maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication (B2i)

S'informer, se Documenter

Identifier, trier et évaluer des ressources.

Chercher et sélectionner l'information demandée.

Détails des objectifs de la mise en œuvre de l'activité

Proposer cette vidéo et cette activité aux élèves (placés par groupe de 4) avait des objectifs multiples :

- 1) Proposer une activité autour de calculs de volumes avec des objets de la vie courante.
- 2) Proposer une problématique demandant une prise d'initiative (comment se débrouiller pour estimer, calculer la capacité de la tasse géante que l'on voit en vidéo ? la capacité de la petite tasse que j'ai dans les mains ?) et **permettre aux élèves une modélisation mathématique d'un problème concret**.
- 3) Proposer une activité utilisant les mesures anglo-saxonnes (problème de conversion des pouces, pieds en cm et m... des gallons en litres...).
- 4) Travailler (sans le dire) des situations de proportionnalité.
- 5) Proposer un travail d'équipe original.

3. Scénario de mise en œuvre de cette activité

Ce qui a été fait avant

Cette activité, proposée à une classe de 4^{ème}, n'avait pas été précédée de travaux autour des volumes, ni autour de la notion de proportionnalité.

Je m'attendais donc à ce que les formules nécessaires (volume d'un cylindre par exemple) ne soient pas maîtrisées par les élèves.

Mais on peut envisager de proposer cette activité à partir de la classe de 5^{ème}, éventuellement après avoir déjà vu ou revu quelques exercices autour des calculs de volumes et des travaux autour de la proportionnalité.

Déroulement de la séquence

Temps 1 : temps collectif de 15 minutes – installation + vidéo + problématique + première estimation

14h05 : Lorsque les élèves arrivent à la porte d'entrée de la salle, je leur fais tirer une carte pour faire des groupes de 4 élèves de façon aléatoire (les 4 rois ensemble, les 4 dames ensemble, les 4 valets ensemble...)



Les élèves s'installent. Le tbi (tableau blanc interactif) est allumé, il présente la page suivante :



Je débute la séance en expliquant aux élèves qu'un groupe d'américains, employés d'un site de vente en ligne a eu l'idée de battre le record du monde de la plus grande tasse à café : « Un record absolument inutile et donc totalement génial !!! »... Rires dans la salle...

Rapidement, je lance la vidéo (58 secondes) qui présente les étapes de construction de cette tasse géante.

J'affiche à l'écran l'image (capture de la vidéo) ci-contre. Elle restera à l'écran toute la séance.

Après cette vidéo, je lance un défi aux élèves : « je voudrais vous demander si vous êtes capable **d'estimer la capacité de cette tasse...** »



Les élèves me demandent des dimensions, mais je leur dis qu'ils vont, dans un premier temps, essayer de se débrouiller avec ce qu'ils ont vu et cette image (voir ci-dessus à droite).

Et j'ajoute. Je vais également vous distribuer une vraie tasse (une par groupe de 4 – voir photo ci-contre) et vous poser une seconde question : **combien de petites tasses peut-on remplir avec le contenu de la tasse géante ?**

Cette problématique est reformulée avec certains élèves : **combien de petites tasses doit-on vider dans la grande pour la remplir ?**

Je donne une dernière consigne aux groupes : « Vous avez tiré une carte pour former des groupes. La couleur de la carte précise le rôle que vous allez jouer dans le groupe :

L'élève qui a tiré la carte « cœur » a le droit d'utiliser sa calculatrice.

L'élève qui a tiré la carte « carreau » a le droit d'aller sur Internet (salle à côté équipée d'ordinateurs).

L'élève qui a tiré la carte « pique » est le maître du temps (il doit faire en sorte que l'équipe respecte les temps de travail et les échéances qui vont être demandées)

L'élève qui a tiré la carte « trèfle » est celui qui rédigera les propositions et la synthèse finale à rendre à la fin de la séance. »

Je termine en demandant aux équipes de me donner une réponse instinctive (sans aucun calcul) au sujet de cette question qui sera le fil rouge de notre séance :

« Combien de petites tasses doit-on vider dans la grande pour la remplir ? »

Note pour le lecteur : mes calculs m'ont donné une réponse d'environ 80 000 petites tasses pour remplir la grande...

J'obtiens les réponses suivantes (données sur papier – petit coupon-réponse) :



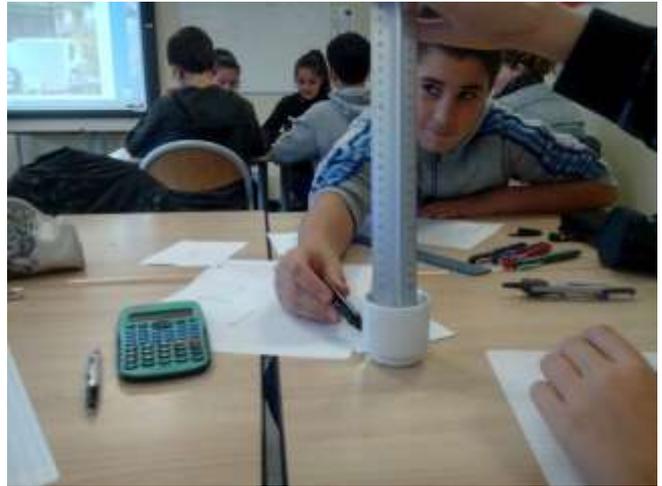
	A	B	C	D	E	F
1	combien de petites tasses peut-on remplir avec la grande ?					
2						
3		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
4	4ème F	1	2 000			
5	4ème F	2	1 000 000			
6	4ème F	3	100 000			
7	4ème F	4	100 000			
8	4ème F	5	100			
9	4ème F	6	5 000 000			
10		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
11	4ème B	1	1 000 000			
12	4ème B	2	2 000 000			
13	4ème B	3	20 000			
14	4ème B	4	1 000 000			
15	4ème B	5	1 000 000 000			
16	4ème B	6	30			
17	4ème B	7	900			

14h20 : Je lance les élèves dans leur recherche en précisant : « je veux une seconde estimation à 14h45 ».

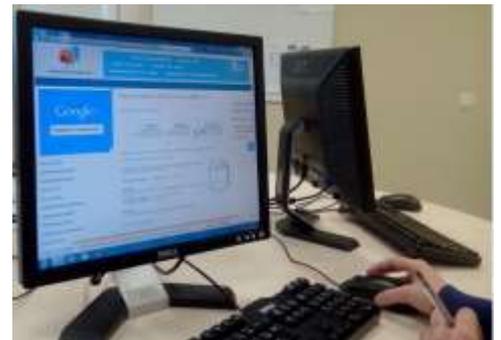
Temps 2 : temps de recherche en groupe de 25 minutes – ordre de grandeur... 2^{ème} estimation

Les stratégies des élèves sont variables (en particulier au sujet des méthodes pour trouver un ordre de grandeur du volume de la tasse géante), mais je distingue plusieurs constantes :

- a) La volonté de trouver les dimensions de la petite tasse en mesurant avec les outils de géométrie « classiques » :



- b) Le besoin (pour beaucoup de groupes) de retrouver la formule du volume du cylindre.
On cherche dans son manuel ou on envoie le membre du groupe (le « carreau ») sur Internet pour la retrouver...



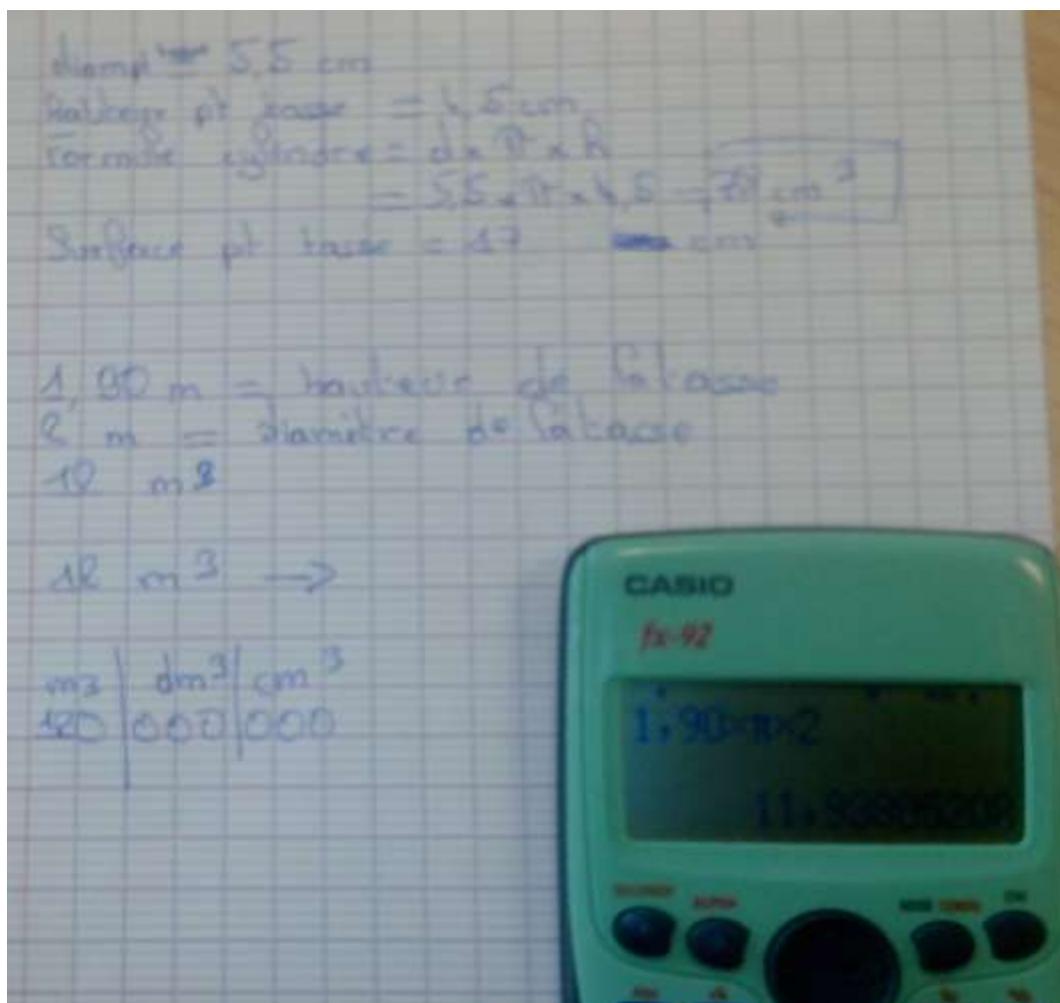
Pour l'estimation des dimensions de la grande tasse, les stratégies sont plus variées :

- Ordre de grandeur très imprécis (parfois trop) : j'entends : « elle fait au moins 5 mètres... » ou encore « on va dire qu'elle fait comme un cube de 2m... »
- Volonté de se référer à la vidéo : « elle est plus grande de l'homme »
- Technique utilisant la copie d'écran et la proportionnalité : « sur l'image, l'homme mesure 35 cm... et la tasse 42cm. Si l'homme mesure 1m80 en vrai..... » voir photo ci-contre.



En circulant dans les groupes, je vois quelques erreurs du type :

- Mauvaise formule ($2\pi R h$ au lieu de $\pi R^2 h$ pour le volume du cylindre)
- Prendre le diamètre dans la formule au lieu du rayon...



L'heure tourne... Certains groupes ont du mal obtenir une estimation, mais il est 14h45.
Je demande les 2^{èmes} estimations (toujours par écrit pour préserver la confidentialité... pour l'instant) :

	A	B	C	D	E	F
1	combien de petites tasses peut-on remplir avec la grande ?					
2						
3		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
4	4ème F	1	2 000	2 500		
5	4ème F	2	1 000 000	1 538 462		
6	4ème F	3	100 000	113 000		
7	4ème F	4	100 000	50 000		
8	4ème F	5	100	10 000		
9	4ème F	6	5 000 000	60 000		
10		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
11	4ème B	1	1 000 000	25 000		
12	4ème B	2	2 000 000	140 000		
13	4ème B	3	20 000	2 424 524		
14	4ème B	4	1 000 000	1 000 000		
15	4ème B	5	1 000 000 000	748		
16	4ème B	6	30	1 381		
17	4ème B	7	900	1000		

Temps 3 : temps collectif de 10 minutes – au sujet des formules et des estimations

14h45 : Avant de relancer les élèves pour un second temps de travail par groupe, je reviens sur trois points :

1) Au sujet des formules :

Nous évoquons le fait que la petite tasse n'est pas un cylindre parfait, mais nous convenons que c'est un modèle qui mérite d'être suivi.

Je demande la formule du volume d'un cylindre et nous actons qu'il s'agit bien de $\pi R^2 h$ (j'évoque la confusion entre l'aire du disque de base : πR^2 et le périmètre d'un cercle $2\pi R$...)

2) Au sujet des dimensions de la petite tasse :

J'invite les élèves à ne pas confondre diamètre et rayon... (à la tête de certains groupes... cette remarque semble suffire ...)

3) Au sujet des dimensions de la grande tasse :

Je les félicite pour les stratégies d'approximation et je leur montre l'image suivante qui donne des dimensions précises, mais... en pieds anglo-saxons... :



14h55 : Je relance les élèves dans leur recherche en précisant : « je veux une troisième estimation à 15h15 ».

Temps 4 : temps de recherche en groupe de 20 minutes – calcul, conversion... 3^{ème} estimation

Les élèves « carreaux » partent chercher les conversions pieds – cm sur Internet.

Certains reviennent avec des informations du type :

1 foot =
30.48 centimeters

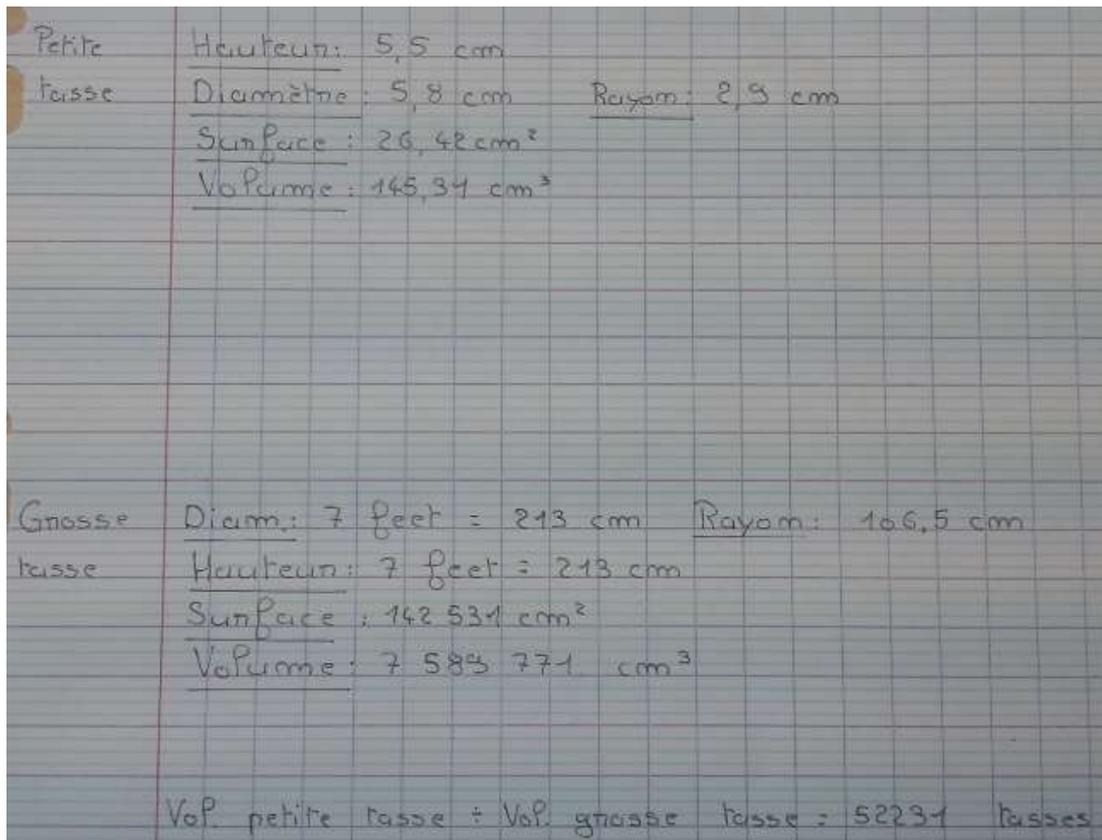
D'autres utilisent des sites de conversion du type

 **Convert foot to centimetre**

7	feet
213.36	cm
<input type="button" value="Convert!"/>	

Les calculs reprennent.

Les rédactions avancent :



15h15 : voici les 3^{èmes} estimations (très nets progrès en termes de précision)

	A	B	C	D	E	F
1	combien de petites tasses peut-on remplir avec la grande ?					
2						
3		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
4	4ème F	1	2 000	2 500	226 845	
5	4ème F	2	1 000 000	1 538 462	79 222	
6	4ème F	3	100 000	113 000	73 656	
7	4ème F	4	100 000	50 000	100 000	
8	4ème F	5	100	10 000	111	
9	4ème F	6	5 000 000	60 000	52 231	
10		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
11	4ème B	1	1 000 000	25 000	77 705	
12	4ème B	2	2 000 000	140 000	80 000	
13	4ème B	3	20 000	2 424 524	55 464	
14	4ème B	4	1 000 000	1 000 000	50 000	
15	4ème B	5	1 000 000 000	748	60 583	
16	4ème B	6	30	1 381	76 244	
17	4ème B	7	900	1000	54 495	

Temps 5 : temps collectif de 10 minutes – au sujet des 3èmes estimations et pour aller plus loin

Pour la première fois, je montre collectivement les estimations de tous les groupes (voir tableau ci-dessus).
Et je passe 2 dernières consignes :

- a) Je rappelle (je l'avais dit en début de séance) que je souhaite récupérer un écrit rédigé du groupe (par le « trèfle ») à la fin de la séance (à 15h40).
- b) Je propose un prolongement aux groupes les plus rapides (certains ont déjà rédigé ou presque) au sujet de : temps pour remplir la grande tasse :

Je montre donc une deuxième vidéo (les 50 premières secondes seulement)

[Cliquez sur la photo ci-dessous pour démarrer la vidéo \(accès Internet nécessaire\)](#)



http://www.dailymotion.com/video/x1739we_record-de-la-plus-grande-tasse-a-cafe-partie-2_school

Je formule donc ma question de prolongement :

Combien de temps faudra-t-il pour remplir la grande tasse avec 2 tuyaux de café ayant chacun pour débit 2,1 gallons par minute ?

Je précise que le gallon est une unité de volume anglo-saxonne.

Très peu d'élèves la connaissaient.

Il est 15h25. Je relance les élèves pour la dernière fois.

Temps 6 : temps de recherche en groupe de 20 minutes – rédaction finale et prolongement

Certains groupes reprennent leurs calculs au sujet de la question initiale (nombre de tasses...) pendant que le « carreau » rédige.

D'autres se lancent dans le problème de « temps de remplissage » :

- Recherche sur Internet au sujet du gallon...

1 US gallon =

3.78541178 litre

Je veux convertir:

2.1

Gallon (gal)

Métrique

km³ 9,25×10⁻¹²

m³ 0,01

hl 0,09

Décalitre 0,93

dm³ 9,25

Litre 9,25

à 15h45, je relève les travaux rédigés et les estimations finales

	A	B	C	D	E	F
1	combien de petites tasses peut-on remplir avec la grande ?					
2						
3		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
4	4ème F	1	2 000	2 500	226 845	74 605
5	4ème F	2	1 000 000	1 538 462	79 222	79 222
6	4ème F	3	100 000	113 000	73 656	74 106
7	4ème F	4	100 000	50 000	100 000	87 110
8	4ème F	5	100	10 000	111	103 628
9	4ème F	6	5 000 000	60 000	52 231	52 231
10		groupes	1ère estimation avant la recherche	2ème estimation après 25 min de recherche	3ème estimation après 45 min de recherche	4ème estimation après 60 min de recherche
11	4ème B	1	1 000 000	25 000	77 705	77 705
12	4ème B	2	2 000 000	140 000	80 000	80 000
13	4ème B	3	20 000	2 424 524	55 464	55 464
14	4ème B	4	1 000 000	1 000 000	50 000	75 000
15	4ème B	5	1 000 000 000	748	60 583	60 583
16	4ème B	6	30	1 381	76 244	76 244
17	4ème B	7	900	1000	54 495	54 495

Ce qui a été fait après : valider ou invalider le modèle

La séance suivante, un collègue de sciences physiques (Mr Patrice Blino – merci Patrice), à qui j'avais parlé de cette activité, est venu en classe pendant quelques instants pour présenter deux autres méthodes expérimentales pour calculer le volume de la petite tasse :

Nous avons utilisé des instruments de géométrie pour mesurer (avec une certaine imprécision les dimensions de cette petite tasse) et nous avons considéré qu'elle était un cylindre parfait (2^{ème} imprécision...)

Il propose d'utiliser de l'eau !

Technique A : En utilisant une balance :

Mr Blino rappelle que si on connaît la masse de l'eau contenue dans la tasse, on peut en déduire son volume...

Avec l'aide d'un élève, il tare la balance avec une tasse vide dessus.
Il remplit la tasse.



L'élève lit la masse : 90,4 g et déduit donc un volume de 90,4 cm³.

(Les groupes avaient, en général, trouvé environ 98 ou 100 cm³ par le calcul)

Technique B : avec une éprouvette graduée.

Mr Blino propose à l'élève de verser le liquide contenu dans la tasse pleine dans une éprouvette graduée et de lire le volume obtenu. Là encore, le volume obtenu semble compris entre 90 et 91 cm³.



être

Au final, le professeur de sciences physiques, utilisant les dimensions données pour la grande tasse, conclut auprès des élèves avec les calculs suivants :

Les dimensions de la grande tasse sont : $h = 213,36$ cm et $R = h/2 = 106,38$ cm

Nombre de petites tasses remplies = Volume grande tasse (en cm³) / volume petite tasse (en cm³)
= $\pi R^2 h / 90,4 = \mathbf{84\ 384}$

L'ordre de grandeur du nombre de tasses proposées par les élèves semble vraiment correct. Le collègue de sciences valide le modèle et le protocole global choisis par les élèves.

Conclusions autour de la modélisation sur la tasse à café :

Le choix par la majorité des élèves (presque tous, en fait) est l'assimilation d'une tasse à un cylindre sans tenir compte du « renflement » à la base de la tasse. Il s'agit bien de retranscrire en un modèle mathématique exploitable. Ce choix effectué, peu de matériels sont nécessaires pour obtenir une estimation (en 4F, la moyenne est de 78 484 tasses) : une formule, une règle et une bonne maîtrise du calcul. Néanmoins le modèle « surestime » le volume dans la majorité des groupes. La validité du modèle est donc souhaitable d'où la richesse apportée par le regard d'une autre discipline.

En utilisant une méthode « physique » (utilisation de matériels plus conséquents : une balance et une éprouvette graduée précise), le nombre de tasses est de 84 384. Le modèle « mathématique » s'écarte de 7% de ce modèle « physique ».

Pour des conclusions, sur les apports des outils numériques voir :

<https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupe-de-recherche/2013-2015/video-le-record-du-monde-de-la-tasse-a-cafe-794421.kjsp?RH=1160078262078>