Stéphane PERCOT
Lycée Rosa Parks
La Roche sur Yon
Groupe de recherche TraAM

Académie de Nantes
Mars 2021

Modéliser en mathématiques
Terminale option « mathématiques complémentaires »

Inspiré du sujet de mathématiques du BAC S - Asie 2019
Rappel : La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

M Perk s'installe à la terrasse d'un bar parisien *(tout ressemblance avec un personnage existant ne serait que pure coïncidence car actuellement les bars sont fermés...).* La température extérieure est de 10°C *(ben oui il fait froid à Paris...)*.

Un serveur approche et demande : **"Et qu'est-ce qu'on lui sert au monsieur ?"**

M Perk ne relève pas le ton surprenant de la question et répond : **"Un café s'il vous plait."**

Le serveur crie vers le comptoir : **"et un café pour la table n°4 !!!"** *(NDLR : le numéro de la table ne sera pas utile pour la suite du problème)*

La machine à café chauffe et remplit la tasse d'un café italien pur arabica *(oh le placement produit à 2 balles…)* à une température précise de 80°C *(certifié par le constructeur italien).*

Le serveur apporte le café en terrasse, le dépose et dit **"4,50 € !"**

M Perk paye *(sans relever le prix indécent du café parisien)* et pour faire genre "je frime en terrasse d'un café de la rive gauche", il attend un peu que son café refroidisse en regardant les passants des quais de Seine... *(vraiment quel cliché !)*

Il remarque qu'au bout de 1min 30s son café a atteint la température de 61,85°C *(précis le mec...on sent qu'on n'a pas affaire à un amateur…)*

Mais M Perk souhaite boire son café à exactement 40°C *(on sent quand même le mec un peu psycho rigide).*

Il décide donc d'attendre.

Combien de temps doit-il encore attendre ?

Détailler votre répondre à l'aide d'une démarche précise et répondre à la seconde près.

Éléments de correction :

La loi de refroidissement de Newton permet d'écrire que la fonction $y(t)$ exprimant la température du café en fonction du temps est solution de l'équation différentielle $y' = \alpha(y - 10)$

On résout cette équation :

y = C $e^{\alpha t}$+ 10

y(0) = 80 donc C = 70 ainsi y = 70 $e^{\alpha t}$+ 10

y(1,5) = 61,85 donc 70 $e^{1,5\alpha}$+ 10 = 61,85 donc $e^{1,5\alpha}$= $\frac{51,85}{70}$ (l'unité utilisée pour t est la minute)

donc α = ln($\frac{51,85}{70}$) : 1,5 = - 0,2

ainsi y = 70 $e^{-0,2t}$+ 10

On cherche t tel que 70 $e^{-0,2t}$+ 10 = 40 c'est-à-dire tel que $e^{-0,2t}$= 3/7

On trouve t = ln$(3/7)$: (- 0,2) ≈ 4,2365 minutes soit 254 secondes.

Sachant que la question est posée au temps t = 90 secondes on doit donc attendre 164 secondes soit 2 min 44 s

Exemple de mise en œuvre en cours :

***Ce qui avait été fait avant** : les élèves ont étudié un problème similaire dans une activité collective*

Source (Manuel Déclic Hachette Maths Complémentaires problème 118 page 91

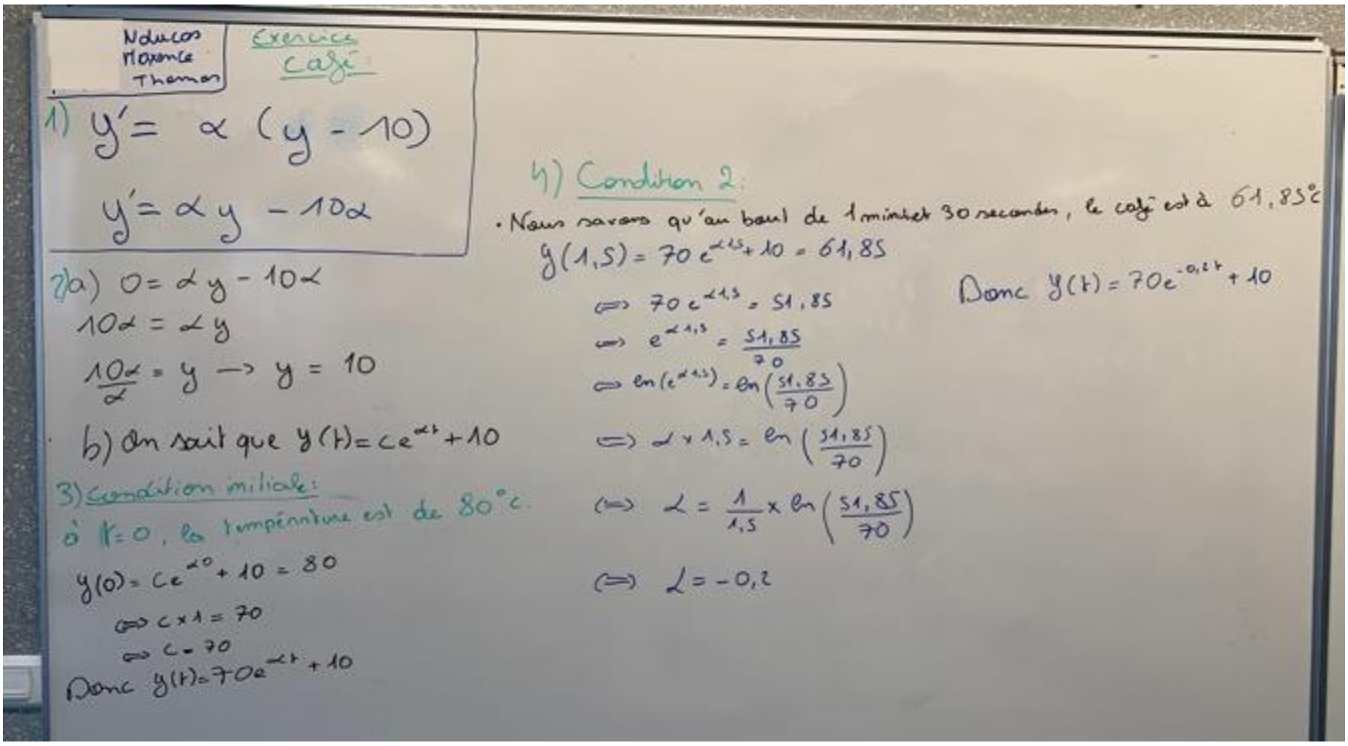
« Dans une cuisine dont la température ambiante est constante et égale à 22°C, Justine suis la recette d'une tarte qui doit cuire dans un four à la température de 180°C et doit être servie à 25°C.
Vingt minutes après avoir sorti la tarte du four, Justine contaste que la température de la tarte a diminué de 80°C. »
Cette activité a été résolue en classe la semaine précédant la séance de la tasse à café.

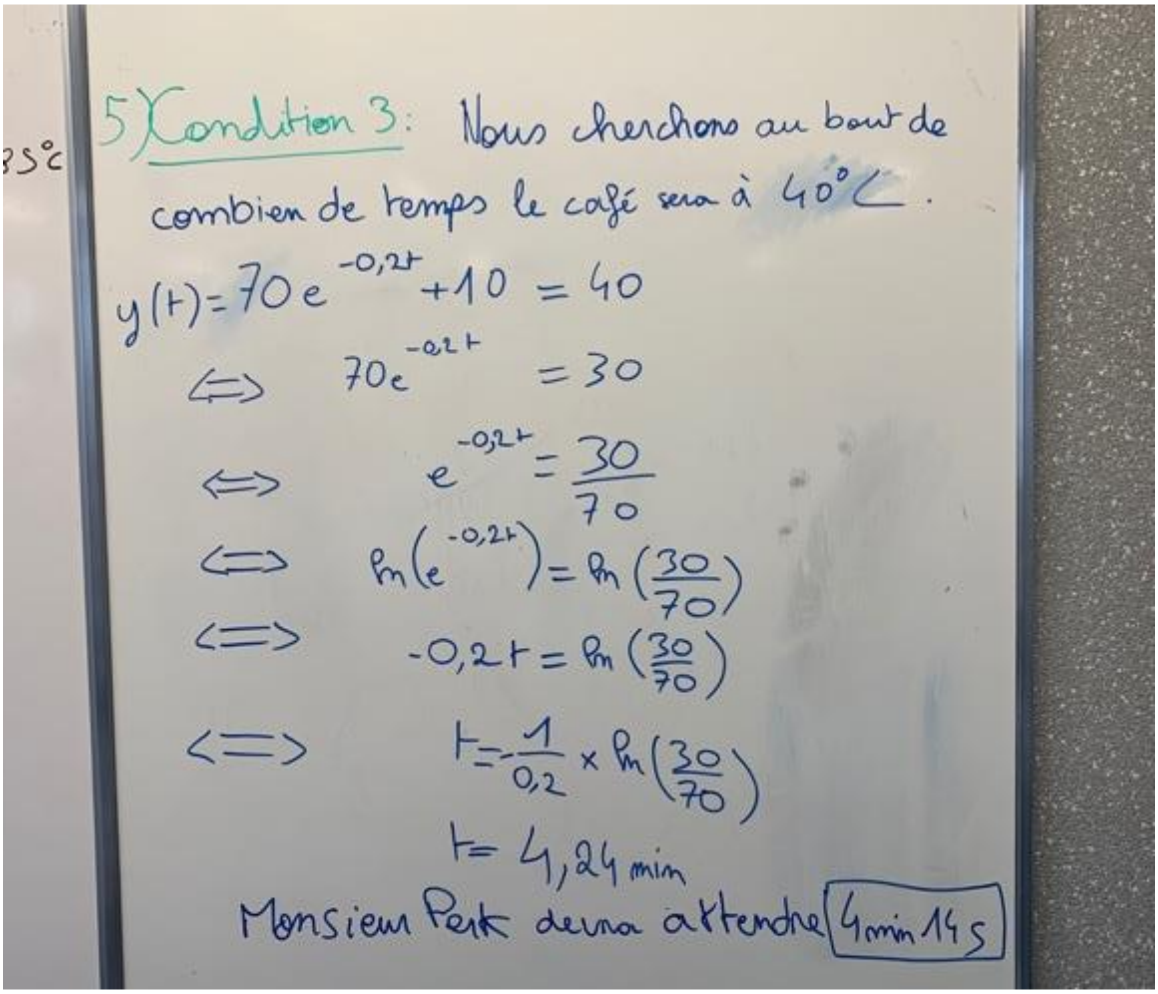
Ce qui a été fait le jour de cette séance sur la tasse à café :

Les élèves ont formé des groupes de 3 et chaque groupe disposait d'une salle de classe (les séances de mathématiques complémentaires dans mon lycée ont lieu le mercredi après-midi… 9 salles disponibles pour mes 9 groupes d'élèves…).

Les élèves ont donc pu travailler directement sur un tableau. Chaque groupe disposait d'environ 20 minutes pour produire une solution. Voici quelques exemples de productions.

Exemples de productions d'élèves :





Nima [redacted]

Maximilien [redacted]

Salomé [redacted]

TGC

modelisation :

a)

$y' = \alpha y - 10\alpha$

$0 = \alpha y - 10\alpha$

$10\alpha = \alpha y$

$\frac{10\alpha}{\alpha} = y$

$10 = y$

b)

donc $y(t) = Ce^{\alpha t} + 10$

condition initiale :

$y(0) = 80$

$y(0) = Ce^{\alpha 0} + 10 = 80$

$= Ce^{\alpha 0} = 70$

$Ce^{0} = 70$

$C = 70$

alors $y_c(t) = 70e^{\alpha t} + 10$

condition 2 :

$y(1{,}5) = 61{,}85$

$= 70e^{1{,}5\alpha} + 10 = 61{,}85$

$70e^{1{,}5\alpha} = 51{,}85$

$e^{1{,}5\alpha} = \frac{51{,}85}{70}$

$\ln(e^{1{,}5\alpha}) = \ln\left(\frac{51{,}85}{70}\right)$

$1{,}5\alpha = \ln\left(\frac{51{,}85}{70}\right)$

$\alpha = \frac{1}{1{,}5} \times \ln\left(\frac{51{,}85}{70}\right)$

$\alpha = -0{,}200$

donc $y(t) = 70e^{-0{,}200t} + 10$

condition 3 :

$y(t) = 70e^{-0{,}200t} + 10 = 40$

$= 70e^{-0{,}200t} = 30$

$e^{-0{,}200t} = \frac{30}{70}$

$\ln(e^{-0{,}200t}) = \ln\left(\frac{30}{70}\right)$

$-0{,}200t = \ln\left(\frac{30}{70}\right)$

$t = \frac{1}{-0{,}200} \times \ln\left(\frac{30}{70}\right)$

$t = 4{,}23$ min

$4{,}23 - 1{,}5$

$= 2{,}73$ min

M. Perk doit attendre précisement 2 minutes et 43 secondes !