
Les ponts en morceaux de bois.

Présentation du problème.

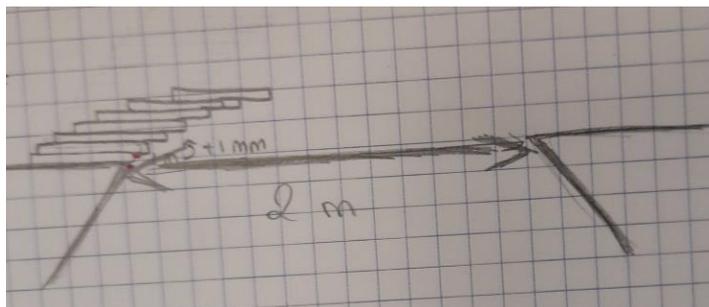
La base du problème a été proposée en maths complémentaires et en terminale STMG. Le problème est présenté dans les deux cas à l'oral. Les objectifs étaient toutefois différents. Dans un cas, il s'agissait d'une poursuite du concept de limites de suites en maths complémentaires (le concept aurait été introduit en première si le confinement n'avait pas eu lieu) alors que dans l'autre cas, il s'agit d'introduire spécifiquement la somme des termes d'une suite arithmétique et/ou géométrique. La méthode n'est absolument pas indiquée mais l'objectif commun est bien de modéliser à l'aide de suites numériques le problème posé.

Énoncé du problème : la construction d'un pont entre deux tables.

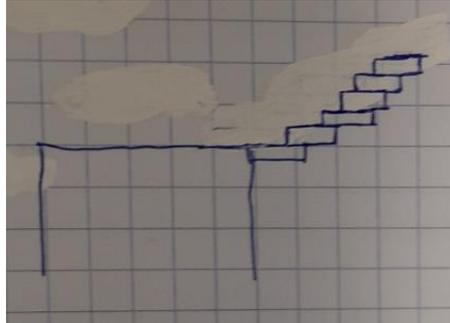
Les énoncés s'effectuent à l'aide de morceaux de bois pour bien comprendre le principe.

A l'aide de morceaux de bois d'une longueur de 10 cm, construire un pont entre les deux tables avec les règles suivantes :

- La pièce suivante dépassera la pièce précédente en ajoutant 1 mm à chaque fois. Ainsi la deuxième pièce dépasse de 1 mm la première, la troisième pièce dépasse de 2 mm la deuxième, etc... (Uniquement en terminale STMG)



- La pièce suivante dépassera la pièce précédente avec un certain coefficient. Ainsi (par exemple) la deuxième pièce dépasse de 9 cm la première pièce (10% de la longueur totale est enlevée), la troisième pièce dépasse de 8.1 cm la deuxième (soit 10% en moins de 9cm), etc...



Suivant les groupes, on peut faire varier cette proportion toujours en s'appuyant sur une construction physique à l'aide des bouts de bois.

Précision importante : le principe physique sur le centre de gravité de l'ensemble n'est pas pris en compte. Ainsi, la première pièce peut être collée à la table pour être entièrement dans le vide ou dépasser de 1mm le bord de la table. Le pont ne s'écroule donc pas.

Après une courte recherche individuelle, les élèves sont répartis en groupe de voisinage (par 2 ou 3). Des morceaux de bouts de bois sont distribués dans les différents groupes.

Recherche des élèves et modélisation.

Très vite, les élèves s'emparent des morceaux de bois pour commencer leur pont.

En maths complémentaires, la modélisation par les suites arrive assez naturellement. Le problème revient donc à déterminer si la somme des bouts de bois comble l'espace entre les deux tables (ou le $\frac{1}{2}$ espace car certains souhaitent partir des deux côtés).

le terme l_n correspond à la longueur qui "dépass

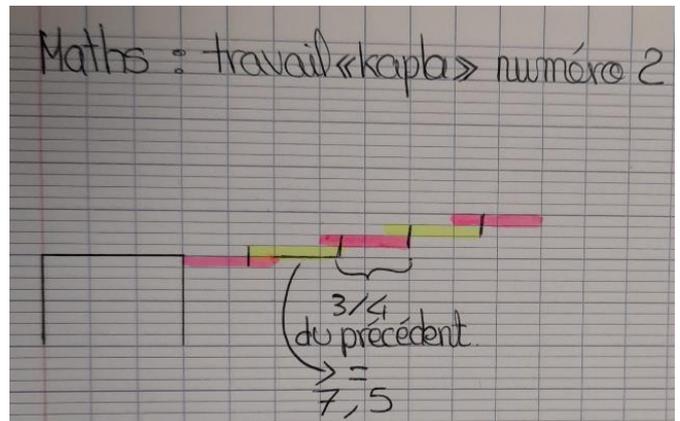
$l_n = 10 \text{ cm}$: c'est la longueur du kappa

$l_{n+1} = \frac{2}{3} l_n$

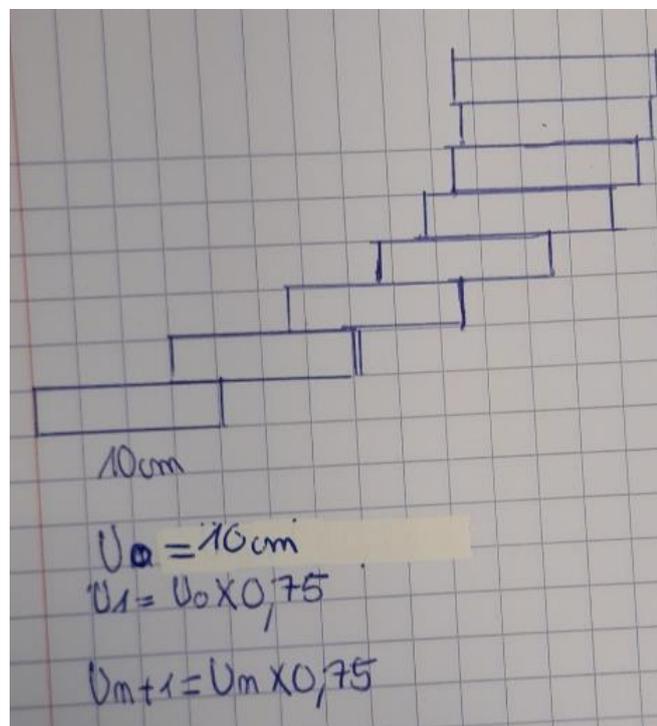
On peut remarquer que la représentation ne correspond pas à la suite géométrique. Sur la représentation, ce qui dépasse correspond toujours au $\frac{2}{3}$ de l'espace précédent.

En terminale STMG, pour la très grande majorité des groupes, un temps de manipulation est nécessaire afin de bien comprendre ce qui est demandé.

Puis, de nombreux dessins apparaissent pour bien comprendre ce qui est demandé.



Enfin, après mes relances pour associer la représentation à un modèle mathématique, le modèle de « suites numériques » apparaît.



Une modélisation : pour quoi faire ?

La modélisation dans cette activité :

- Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, ~~de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques ...~~).
- Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. *Le tableur (STMG) ou un algorithme (STMG / Maths complémentaires) ont été utiles pour permettre de donner une réponse à ce problème avant d'utiliser les limites ou la somme des termes.*
- Valider un modèle.

En maths complémentaires, le problème a été réexploité avec des données différentes.

Il semble qu'il y ait une suite. Définissons la :
Le terme correspond à la longueur qui "dépasse"
 $U_0 = 10\text{cm}$ (c'est la longueur du kapla de base)
 (U_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme $U_0 = 10$ et de raison $\frac{999}{1000}$

$$U_1 = \frac{999}{1000} U_0$$
$$U_2 = \left(\frac{999}{1000}\right)^2 U_0$$
$$U_n = \left(\frac{999}{1000}\right)^n U_0$$

la somme des n premiers termes est
 $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$
 $S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Donc,
$$l_n = U_0 \times \frac{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{n+1}}{1 - \frac{999}{1000}}$$
$$l_n = 10 \times \frac{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{n+1}}{\frac{1}{1000}}$$
$$l_n = 10 \times 1000 \left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{n+1}\right)$$
$$l_n = 10000 \left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{n+1}\right)$$

Pour avoir la longueur du pont, il reste à calculer la limite
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 10000$$

La longueur du pont est donc de 10 000cm.

- ...Ou invalider un modèle.

Les problèmes ne sont que purement théoriques...un pont ne peut pas tenir physiquement...sauf à utiliser la suite harmonique (prolongement possible – fait en maths complémentaires).

lien : <https://www.lebesgue.fr/video/5min/tapie-viola>