

*Accompagnement
personnalisé*



Mathématiques

Liaison Bac Pro -> BTS

Qu'est-ce qu'une fonction logarithme ?



Où j'en suis ?

	A	CA	NA		A	CA	NA
<u>Proposition 1</u>				<u>Proposition 2</u>			
<p>A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies au centième :</p> <p>$\ln(0.5) \approx \dots$ $\ln(0.1) \approx \dots$ $\ln\left(\frac{1}{4}\right) \approx \dots$</p> <p>$\ln(0.01) \approx \dots$</p>				<p>Quelle condition doit remplir la variable x pour que le réel $\ln(x)$ existe ?</p> <p>.....</p>			
<u>Proposition 3</u>				<u>Proposition 4</u>			
<p>Quel est le sens de variation de la fonction logarithme népérien ou logarithme décimal ?</p> <p>.....</p>				<p>Donner la valeur exacte sous forme de somme de logarithmes :</p> <p>$\ln(2) \approx \dots$</p> <p>$\ln(0.1) \approx \dots$</p>			
<u>Proposition 5</u>				<u>Proposition 6</u>			
<p>Ecrire la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$:</p> <p>.....</p>				<p>Résoudre l'équation $\ln(x) = 3$</p> <p>.....</p> <p>.....</p>			

Mon score

Si j'obtiens...	je peux aller...
1 ou 2 Acquis	vers la fiche de synthèse
3 Acquis ou plus	vers les exercices d'application
5 Acquis ou plus	vers les exercices d'entraînement
6 Acquis ou plus	vers les exercices d'approfondissement

Démarche d'investigation

1. Problème initial :

Comment résoudre l'équation d'inconnue x du type $a^x = b$ où a et b sont deux réels ?

Certaines sont évidentes comme $2^x = 8$ où l'on trouve $x = \dots$ mais si l'on pose $2^x = 232$?

2. Activité de découverte du logarithme décimal

Essayons de résoudre d'abord des équations du type $10^x = b$ avec quelques exemples :

Equation à résoudre	Solution évidente sans calculatrice	Solution à l'aide de l'opérateur « log »
$10^x = 10000$	$x =$	$\log(10000) \approx \dots$
$10^x = 0,001$	$x =$	$\log(0,001) \approx \dots$
$10^x = 1$	$x =$	$\log(1) \approx \dots$
$10^x = 3$	$x = ?$	$\log(3) \approx \dots$
$10^x = 0$	$x = ?$	
$10^x = -2$		

Visualisons sur un diagramme :		

3. Observations de ces résultats

⊕ **Idée** : La fonction \log permet de résoudre les équations du type $10^x = b$ car elle permet de retrouver l'exposant de la puissance de 10. Finalement, son rôle est de «neutraliser» la fonction «puissance de 10».

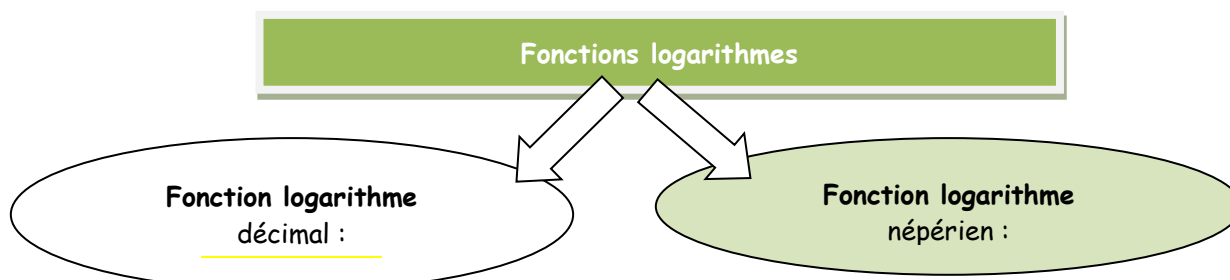
⊕ **Analogie** : Connaissez vous une fonction similaire ? la fonction

⊕ **Calculs impossibles** ! Pourquoi le calcul de $\log(-2)$ débouche sur une impossibilité ?

Explication : on cherche la puissance de 10 qui donne -2 comme résultat. Or une puissance de 10 (exponentielle de base 10) est toujours un nombre positif. Donc calculer $\log(-2)$ n'a pas de sens !

L'essentiel

1. Définition d'une fonction logarithme



Par définition :

« Mécanisme de réciprocity »	Si pour tout x , alors pour tout réel $y > 0$,	$10^x = y \iff x = \log(y)$	Si pour tout réel x alors pour tout réel $y > 0$,	$e^x = y \iff x = \ln(y)$
Exemple	$10^x = 1000$ donne $x = \log(1000) \approx 3$		$e^x = 5$ entraîne $x = \ln(5) \approx 1,609$	

2. Fonction logarithme népérien

Démarche d'investigation :



A l'aide de la calculatrice graphique, éditons le tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ et observons les valeurs obtenues.

♦ Signe

Les logarithmes sont des quantités réelles qui n'existe que si $x > 0$.

x	
$\ln(x)$	

♦ Variation

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante pour tout réel $x > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

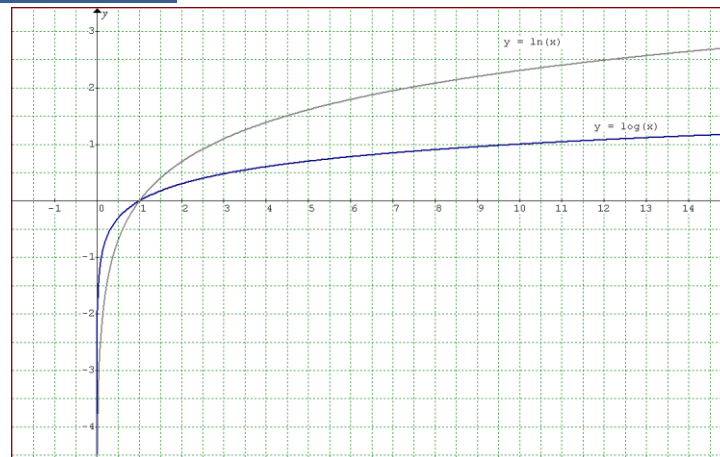
♦ Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{puis} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

♦ Propriétés Opératoires

Logarithme d'un a^n	Si $a > 0$, et n un relatif entier alors $\ln(a^n) = \dots\dots\dots$
Produit de deux exponentielles	Si $a > 0$, $b > 0$, $\ln(a \times b) = \ln(\dots) + \ln(\dots)$
Quotient de deux logarithmes	Si $a > 0$, $b > 0$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(\dots) - \ln(\dots)$

♦ Représentation graphique



♦ Résolution d'équation

Résoudre une équation du type $a^x = b$ où a et b sont deux réels revient à déterminer x tel que :

$$x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Exemple:

$$2^x = 232 \quad \text{donne} \quad x = \frac{\ln(232)}{\ln(2)}$$

$$\text{En effet, } \ln(2^x) = \ln(232) \Rightarrow x \ln(2) = \ln(232) \Rightarrow x = \frac{\ln(232)}{\ln(2)} \text{ soit } x \cong 7,858$$

Cas particulier:

Résoudre une équation du type $e^x = b$ où b est un réel revient à déterminer x tel que :

$$x = \ln(b) \quad \text{puisque } \ln(e) = 1$$

J'applique

Exercice 1

A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs exactes ou arrondies au centième :

$$\ln 2 \approx \dots \quad \ln 3 \approx \dots \quad \ln 0,5 \approx \dots \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) \approx \dots \quad \ln 3^2 \approx \dots \quad \ln 6 \approx \dots$$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $x \mapsto \ln x$

1. A l'aide de la calculatrice (menu TABLE), compléter le tableau de valeurs suivant *en arrondissant les valeurs au dixième* :

x	0,05	0,1	0,2	0,5	0,8	1	1,5	2	10	50
$\ln x$										

2. Que peut-on remarquer lorsque x tend vers :

- Des valeurs « infiniment grandes » ?
- Des valeurs « très proches de zéro » ?

Exercice 3

Donner les valeurs exactes puis approchées à 10^{-3} des nombres :

$$5 \ln 2 + \ln 3 \approx \dots \approx \dots ; \quad \ln 2 + \ln 3 \approx \dots \approx \dots ;$$

$$5 \ln 2^2 + \ln 4 \approx \dots \approx \dots$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \dots \approx \dots ; \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \dots \approx \dots$$

Je m'entraîne

Exercice 4 Simplifier les expressions suivantes :

$$B = 2 \ln(16) = \dots$$

$$C = \frac{\ln(32)}{\ln(2)} = \dots$$

$$D = \ln 6^2 - \ln 3 = \dots$$

$$E = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 2 = \dots$$

$$F = \ln 2 \times 2^3 = \dots$$

$$G = \frac{\ln 2 - \ln 2 \times 0,5}{\ln 2} = \dots$$

Exercice 5

Soit l'expression : $A = \ln x + \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que : $A = 3 + 2 \ln 2$.

.....

.....

Exercice 6

D'après le sens de variation de la fonction \ln , établir le sens de variation des fonctions définies sur l'ensemble des réels :

$f_1 : x \mapsto 2\ln(x)$ est car ; $f_2 : x \mapsto -\ln(x)$ est

$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est ; $f_4 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{3}$ est

Exercice 7

Factoriser les expressions par le terme $\ln(x)$:

$A(x) = 5\ln(x) - 2x\ln(x) = \dots\dots\dots$ $B(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{3} = \dots\dots\dots$

Exercice 8

Étudier le signe des produits suivants :

$\ln(x+1)$ si $x > -0,5$:

$(x+2)\ln(x)$ si $x > 1$:

$\ln(x-x)$ si $x < 3$:

J'approfondis

Exercice 9

Le niveau d'intensité acoustique N d'un son en décibels (dB) est donné par la relation : $N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$

où I est toujours l'intensité sonore en W/m^2 et I_0 l'intensité de seuil d'audibilité fixée :

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

- a) Montrer que le niveau d'intensité acoustique pour une intensité sonore égale à $7 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ s'élève à $80 + 10 \log(\dots)$ dB, en valeur exacte. En donner une valeur approchée à l'unité.

b)

Calculer l'intensité sonore I correspondant à un niveau acoustique de 90 dB

A quelle distance d de la scie se trouve-t-on dans ce cas ? (au mètre près)

Mon bilan

Compétences visées	A	CA	NA
Calculer une valeur approchée d'une exponentielle de base quelconque			
Reconnaître et appliquer des règles opératoires sur les exponentielles			
Connaître le signe d'une exponentielle			
Savoir factoriser une expression par une exponentielle			
Établir le signe d'un produit ayant une exponentielle comme facteur			
Établir la variation de $x \mapsto e^x$			
Établir la variation de $x \mapsto ae^x + b$			

Exercice 1

$$\ln 2 \approx 0,69 \quad \ln 1 = 0 \quad \ln 0,5 \approx -0,69 \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) \approx -1,61 \quad \ln 2^3 = 3 \quad \ln 2 = 1$$

Exercice 2

1. A l'aide de la calculatrice (menu TABLE):

x	0,05	0,1	0,2	0,5	0,8	1	1,5	2	10	50
$\ln x$	-3	-2,3	-1,6	-0,7	-0,2	0	0,4	0,7	2,3	4

- Lorsque x tend vers des valeurs « infiniment grandes », le logarithme devient « de plus en plus grand »
- Lorsque x tend vers des valeurs proches de zéro, le logarithme devient « de plus en plus petit »

Exercice 3

$$5 \ln 2 + \ln 2 = 6 \ln 2 \approx 6,591 ; \quad \ln 2 + \ln 2 = \ln 2 \approx 1,791 ;$$

$$5 \ln 2^2 + \ln 2^4 = 5 \times 2 \ln 2 + 4 \times \ln 2 = 14 \ln 2 \approx 15,380 \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 \approx 0,405 ;$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \approx -0,693$$

Exercice 4

$$B = 2 \ln(16) = 2 \ln 2^4 = 8 \ln 2 ; \quad C = \frac{\ln(32)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^5)}{\ln(2)} = \frac{5 \ln(2)}{\ln(2)} = 5$$

$$D = \ln 2^6 - \ln 2 = 6 \ln 2 - \ln 2 = 5 \ln 2 ; \quad E = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 2 = \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \ln 3 - \ln 2$$

$$F = \ln 2 \times 2^3 = \ln 2^4 = 4 \ln 2 ; \quad G = \frac{\ln 2 - \ln 2 \times 0,5}{\ln 2 - \ln 2} = \frac{\ln 2 - \ln 2}{\ln 2} = 0$$

Exercice 5

$$A = \ln 4x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 4 + \ln 2 + 3 + \ln 1 - \ln x = \ln 4 + 3 = 2 \ln 2 + 3$$

Exercice 6

$f_1 : x \mapsto 2 \ln x$ est croissante car $2 > 0$; $f_2 : x \mapsto -\ln x$ est décroissante car $-1 < 0$.

$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est décroissante comme inverse d'une fonction croissante ; $f_4 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{3}$ est croissante comme quotient d'une fonction croissante par une constante $3 > 0$.

Exercice 7

$$A(x) = 5 \ln(x) - 2x \ln(x) = \ln(x)(5 - 2x) \quad B(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{3x} = \ln(x) \left(1 - \frac{1}{3x}\right)$$

Exercice 8

$\ln(x+1)$ si $x > 3$: positif car $2x+1 > 1$

$(x+2) \ln x$ si $x > 1$: positif comme produit de deux facteurs positifs : $x+2 > 0$ et $\ln x > 0$

$\ln x - 3$ si $0 < x < 3$: négatif comme produit $\ln x > 0$ et $x-3 < 0$

J'approfondis

Exercice 9

a) Calcul de N pour $I = 7 \times 10^{-4}$ W/m²

$$\begin{aligned}
N \times 10^{-4} &\Rightarrow 10 \log \left(\frac{7 \times 10^{-4}}{10^{-12}} \right) \Leftrightarrow N \times 10^{-4} \Rightarrow 10 \log \left(7 \times \frac{10^{-4}}{10^{-12}} \right) \\
N \times 10^{-4} &\Rightarrow 10 \log (7 \times 10^{-4-(-12)}) \Leftrightarrow N \times 10^{-4} \Rightarrow 10 \log (7 \times 10^{-4+12}) \\
N \times 10^{-4} &\Rightarrow 10 \log (7 \times 10^8) \Leftrightarrow N \times 10^{-4} \Rightarrow 10 \log (7) + \log (10^8) \\
N \times 10^{-4} &\Rightarrow 10 \log (7) + 8 \Leftrightarrow N \times 10^{-4} \Rightarrow 10 \log (7) + 80
\end{aligned}$$

En valeur arrondie à l'unité, on trouve **88 dB**.

b)

- Calcul de I correspondant à $N = 90$:

$$\begin{aligned}
N &\Rightarrow 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 90 \Leftrightarrow \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = \frac{90}{10} \Leftrightarrow \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 9 \\
10^{\log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)} &= 10^9 \Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^9 \Leftrightarrow I = 10^9 \times 10^{-12}
\end{aligned}$$

$I = 10^{-3}$: l'intensité sera donc de 10^{-3} W/m² lorsque le niveau atteindra 90 dB.

- D'après la relation $I = \frac{0,07}{d^2}$, on se trouvera à une distance d de la scie de :

$$d = \sqrt{\frac{0,07}{I}} \text{ soit } d = \sqrt{\frac{0,07}{10^{-3}}} \quad \boxed{d \cong 8} \text{ (au mètre près)}$$