**Olympiades de mathématiques 2014**

**ZONE EUROPE – AFRIQUE – ASIE**

**EXERCICE NATIONAL 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES**

|  |  |
| --- | --- |
| La figure ci-contre est constituée d’un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).  Elle possède la propriété suivante :  *Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.*  Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***. |  |

1. Construire une figure équilibrée constituée :
2. de 7 points marqués et 5 droites ;
3. de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant *p* points marqués qu’on a numérotés par les entiers de 1 à *p*.

Cette numérotation est alors dite ***magique*** s’il existe un entier *K*, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à *K*. Cet entier *K* est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

1. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *K* = 8 | *K* = 9 |

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.

Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n’est ni 8 ni 9.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur la figure. 2. Démontrer que si la figure est magique, de constante magique *K*, alors 4 × *K* = 42. 3. Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi. |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur la figure. 2. Démontrer que *a* + *c* + *e* est compris entre 6 et 15. 3. Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante *K*, alors *a* + *c* + *e* = 3(*K* – 7). 4. Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure. | |  |
| 1. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.   Cette figure admet-elle une numérotation magique ? |  | |