MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE
DE NANTES
Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES 2021

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

L'usage de la calculatrice **avec le mode examen activé** est autorisé.

L'usage de la calculatrice **sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercices académiques

Mardi 23 mars 2021 (15 h 10 – 17 h 10)

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Figure $(\mathbf{1}, \boldsymbol{a})$

Soit a un nombre réel donné. On suppose que $a > 1$ dans toute la suite du sujet.
Une **figure** $(1, a)$ est un ensemble fini de points du plan tels que la distance entre deux d'entre eux vaut 1 ou a.

Partie A

1. Donner un exemple de figure $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ à trois points.

2. Existe-t-il une figure $(1, a)$ à trois points telle que ces trois points soient les sommets d'un triangle rectangle ?

3. Donner un exemple de figure $\left(1, \sqrt{2}\,\right)$ à quatre points.

Le but du problème est d'obtenir une classification de l'ensemble des figures $(1, a)$ en fonction du nombre de ses points et de leurs positions relatives.

4. On considère une figure $(1, a)$ à trois points. Quelle est la nature du triangle formé par ces points ? On décrira les différents cas possibles.

Partie B

Dans cette partie, ABC est un triangle équilatéral de coté 1.
On suppose que D est un point tel que les points A, B, C et D forment une figure $(1, a)$.

5. Montrer qu'il est impossible que les distances de D à chacun des trois autres points soient toutes égales à 1.

6. Est-il possible que la distance entre D et A soit égale à a et que toutes les autres distances entre deux points distincts de la figure valent 1 ? Si oui, indiquer la ou les valeur(s) correspondante(s) de a.

7. Comment placer D de telle sorte que la distance entre A et D soit égale à a, et, que toutes les autres distances entre deux points distincts de la figure valent 1 sauf une ? Déterminer la ou les valeur(s) correspondantes pour a.

8. Peut-on placer D de telle sorte que trois distances, exactement, entre deux points distincts de la figure soient égales à a ? Si oui, calculer la ou les valeur(s) correspondante(s) de a.

Partie C

Dans cette partie, ABC est un triangle isocèle en B tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 1$ et $\mathrm{AC} = a$.
On suppose que D est un point tel que les points A, B, C et D forment une figure $(1, a)$.

9. Déterminer les nouvelles figures $(1, a)$ à quatre points A, B, C et D en calculant a à chaque fois.

Partie D

Dans cette partie, ABC est un triangle équilatéral de coté a.
On suppose que D est un point tel que les points A, B, C et D forment une figure $(1, a)$.

10. Déterminer les nouvelles figures $(1, \mathrm{a})$ à quatre points A, B, C et D en calculant a à chaque fois.

Partie E

11. Montrer qu'il existe une figure $(1, a)$ à cinq points.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

k-couples

*Dans cet exercice, on s'intéresse aux couples d'entiers naturels non nuls dont le produit des deux composantes est un multiple de leur somme. Pour k un entier naturel non nul, on appelle **k-couple** tout couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls tel que $x \leq y$ et $xy = k(x+y)$.*

Par exemple, $(12\,;60)$ *est un* 10*-couple puisque* $12 \leq 60$ *et* $12 \times 60 = 720 = 10 \times (12+60)$.

Questions préliminaires

1. Justifier que $(6\,;30)$ et $(10\,;10)$ sont des 5-couples, mais que $(30\,;6)$ et $(5\,;25)$ n'en sont pas.
2. Pour quelle valeur de l'entier naturel non nul k le couple $(8\,;56)$ est-il un k-couple ?
3. Existe-t-il un entier naturel non nul k tel que $(3\,;5)$ soit un k-couple ? Justifier.
4. Est-il vrai que si $(x\,;y)$ est un 5-couple alors $(x^2\,;y^2)$ est un 25-couple ? Justifier.

Recherche de certains k-couples

5. Montrer que si $(x\,;y)$ est un 1-couple, alors $y-1$ est un diviseur de y. En déduire qu'il n'existe qu'un seul 1-couple et donner cet unique 1-couple.
6. Soient x et y deux entiers naturels non nuls.
   Montrer que : $xy = 2(x+y)$ si et seulement si $(x-2)(y-2) = 4$.
   En déduire la liste de tous les 2-couples.
7. Soit k un nombre premier. Combien existe-t-il de k-couples ? Justifier.
8. Dresser la liste de tous les 2021-couples.

k-points et croix

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O.
*Pour k entier naturel non nul, on appelle **k-point** tout point dont le couple de coordonnées est un k-couple.*
*Dire qu'un point A est **une croix** signifie qu'il existe un entier naturel non nul k tel que A soit un k-point.*
Par exemple, le point de coordonnées $(12\,;60)$ *est une croix puisque* $(12\,;60)$ *est un* 10*-couple.*

Le but de cette partie est d'obtenir quelques résultats concernant la répartition des croix dans le plan.

9. Soient x et y deux entiers naturels non nuls avec $x \leq y$.
   Recopier et compléter la fonction Python « $croix(x, y)$ » qui teste si (x, y) est le couple de coordonnées d'une croix.

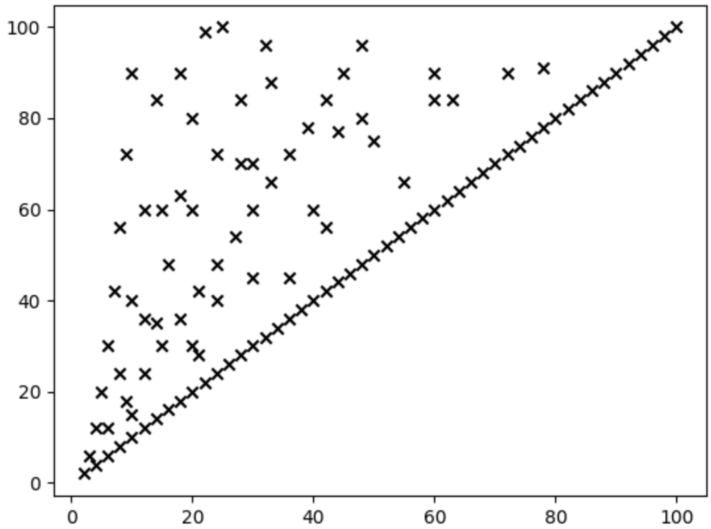
```
def croix(x,y):
    if ..................... : #Compléter ici
        return True
    else:
        return False
```

   On rappelle que l'instruction Python a % b renvoie le reste de la division euclidienne de l'entier a par l'entier non nul b.

La fonction Python « $croix(x, y)$ » ayant été écrite dans un fichier file.py, le programme Python ci-dessous permet d'obtenir le graphique suivant donnant toutes les croix dont l'ordonnée est inférieure à 100.

```
from math import*
from file import croix
import matplotlib.pyplot

xliste=[]
yliste=[]
for y in range(1,101):
    for x in range(1,y+1):
        if croix(x,y):
            xliste.append(x)
            yliste.append(y)
matplotlib.pyplot.scatter(xliste,yliste,c='black',marker='x')
matplotlib.pyplot.show()
```



10. On note D la droite d'équation $y = x$ et P la parabole d'équation $y = x^2 - x$.
Montrer que pour tout entier naturel k non nul, D et P contiennent chacune un k-point.

11. Soient m et k deux entiers naturels non nuls.
Montrer que si $(x\,;y)$ est un k-couple alors $(mx\,;my)$ est un mk-couple.

12. En déduire que si A est une croix alors la droite (OA) contient une infinité de croix.

13. Montrer que toute droite passant par O et de coefficient directeur appartenant à $\mathbb{Q} \cap [1\,;+\infty[$ contient une infinité de croix.
On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme quotient de deux entiers.

14. La droite d'équation $y = x + 1$ contient-elle des croix ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Spirale

Chaque jour, une araignée tire son fil.
Au jour 0, elle trace un segment de longueur 1.
Pour tous les jours suivants, elle poursuit la construction de la manière suivante :
Le matin :

- elle tourne d'un quart de tour à droite
- elle trace un segment **de même longueur** que le dernier segment tracé
- elle tourne à nouveau d'un quart de tour à droite
- elle trace un segment **plus long d'une unité** que le dernier segment tracé

L'après-midi :

- elle procède de la même manière que le matin

Ainsi, chaque jour, quatre nouveaux segments sont tracés.

Pour tout entier naturel k,

- on note L_k la distance parcourue au cours du jour k
- on note S_k la longueur totale parcourue du début du jour 0 à la fin du jour k

Ainsi, $L_0 = S_0 = 1$.

Partie A

La *figure* 1 ci-dessous représente le tracé effectué du début du jour 0 à la fin du jour 2.

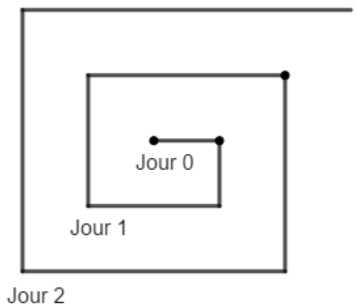


Figure 1

1. Construire sur la copie le tracé effectué du début du jour 0 à la fin du jour 3.
2. Justifier que $L_1 = 8$. Calculer ensuite les valeurs de L_2, L_3, L_4 et L_{10}.
3. Énoncer une conjecture donnant la valeur de L_k pour tout entier naturel k non nul.

On admettra cette conjecture jusqu'à la fin de la partie A.

4. Existe-t-il un jour k au cours duquel la distance parcourue est 1008 ? Si oui, quelle est la valeur de k ? Mêmes questions avec 2020.
5. On a $S_0 = 1$. Vérifier que $S_1 = 9$. Calculer ensuite les valeurs de S_2 et S_{10}.
6. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer S_k en fonction de k.
   On pourra utiliser l'égalité ci-dessous valable pour tout entier naturel k non nul :
$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$
7. On appelle ***carré parfait*** tout nombre qui est le carré d'un entier naturel. Montrer que, pour tout entier naturel k, S_k est un carré parfait.
8. Est-il possible de parcourir une distance totale égale à 16 345 849 ? Si oui, à l'issue de quel jour k ?

Partie B

Pour tout entier naturel k non nul, on note $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_kD_kA_{k+1}$ la ligne brisée représentant le fil tiré par l'araignée au cours du jour k.

On se place maintenant dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{OA}_1, \mathrm{OJ})$ où $(\mathrm{OJ}) \perp (\mathrm{OA}_1)$; $\mathrm{OA}_1 = 1$ et $\mathrm{OJ} = 1$.

La *figure* 2 ci-dessous représente, dans ce repère, le fil tiré par l'araignée du début du jour 0 à la fin du jour 2.

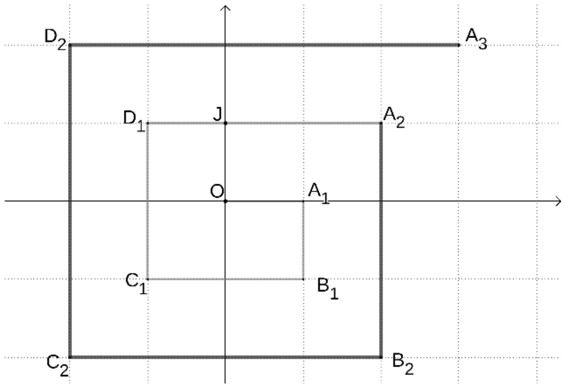


Figure 2

9. Quelles sont les coordonnées des points A_2, D_3 et C_5 ?

Soit k un entier naturel non nul.

10. Donner les coordonnées de A_k, B_k, C_k, D_k et A_{k+1} en fonction de k.

11. Déterminer les équations des droites $(A_k\mathrm{B}_k)$, $(\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k)$, $(\mathrm{C}_k, \mathrm{D}_k)$ et $(\mathrm{D}_k\mathrm{A}_{k+1})$ en fonction de k.

12. Démontrer la conjecture portant sur L_k énoncée à la question **3.**.

13. On considère le point $\mathrm{F}\left(7\,;\frac{7}{2}\right)$. Existe-t-il un jour k au cours duquel le fil de l'araignée passe par le point F ? Si oui, est-ce le matin ou l'après-midi ?

14. Même question que la question **13.** avec le point $\mathrm{G}(-25\,;12)$.

15. Par combien de points M à coordonnées entières est passé le fil de l'araignée du début du jour 0 à la fin du jour k ?