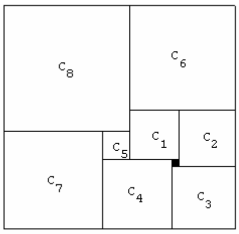
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES
Corrigé du sujet 2005 de l'Académie de Nantes

Exercice 1 : pavages



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré C_1).
Si ce carré C_1 a pour côté **c**, le carré C_2 a pour côté **c + 1**, et le carré C_3 a pour côté **c + 2**.
Le carré C_4 a pour côté **c + 3**.
(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)
Ceci permet de déduire que le carré C_5 a pour côté **4**. Quant au carré C_6 il a pour côté **2c + 1**.
On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est :

(**2c + 1**) + (**c + 1**) + (**c + 2**) , soit **4c + 4**.

Le carré C_7 a pour côté **c + 3 + 4** , soit **c + 7**. Donc l'autre dimension du rectangle initial est :

(**c + 7**) + (**c + 3**) + (**c + 2**) , soit **3c +12**.

Le dernier carré C_8 a pour côté **c + 7 + 4** , soit **c + 11**.

Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :

4c + 4 et (**c + 7**) + (**c + 11**) , soit **2c + 18**

Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7**.

En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32 et 33**.

Exercice 2 : les roses

- Amandine a raison.

Pour 37 roses : $37 \neq 7p$
$37 - 11 = 26 \neq 7p$
$37 - 22 = 15 \neq 7p$
$37 - 33 = 4 \neq 7p$

Pour 59 roses : $59 \neq 7p$
$59 - 11 = 48 \neq 7p$
$59 - 22 = 37 \neq 7p$
$59 - 33 = 26 \neq 7p$
$59 - 44 = 15 \neq 7p$
$59 - 55 = 4 \neq 7p$

- Brigitte a raison.

5 douzaines : 60 $60 \neq 7p$
$60 - 11 = 49 = 7 \times 7$ donc 7 bouquets de 7 roses et 1 bouquet de 11

6 douzaines : 72 $72 \neq 7p$
$72 - 11 = 61 \neq 7p$
$72 - 22 = 50 \neq 7p$
$72 - 33 = 39 \neq 7p$
$72 - 44 = 28 = 4 \times 7$ donc 4 bouquets de 7 roses et 4 bouquets de 11

- Chloé a raison : 73 = 6 x 11 + 1 x 7 = 66 + 7

Comme 1 = 8 x 7 – 5 x 11 = 56 – 55 , 74 = 73 + 1 = (6 –5) x 11 + (1 + 8) x 7 = 1 x 11 + 9 x 7, soit 1 bouquet de 11 et 9 de 7 roses
Comme 1 = 11 x 2 – 7 x 3 = 22 – 21 , 75 = 74 + 1 = (1 + 2) x 11 + (9 – 3) x 7 = 3 x 11 + 6 x 7 , soit 3 bouquets de 11 roses et 6 bouquets de 7 roses

- Dorothée a raison : si on sait réaliser cela pour n roses, alors n = p x 11 + q x 7 (avec $p \geq 5$ ou $q \geq 3$)

Si $q \geq 3$ n + 1 = p x 11 + q x 7 + 11 x 2 – 3 x 7
= (p +2) x 11 + (q-3) x 7

si q<3 et $p \geq 5$ n + 1 = p x 11 + q x 7 + 8 x 7 – 5 x 11
= (p – 5)x 11 + (q + 8) x 7

si q<3 et p<5 ce n'est pas possible

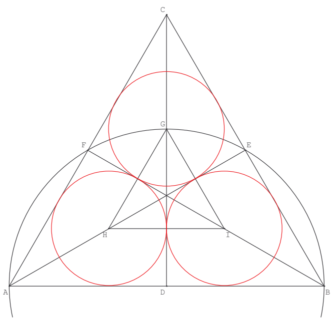
- Etienne a raison

p	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
q	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Nombre de roses	0	7	14	11	18	25	22	29	36	33	40	47	44	51	58

- Fanny a raison

Cela donne comme nombre total n de roses 0, 7, 11, 14, 18, 22, 25, 29, 33, 36, 40, 44, 47,51, 58.
Dans ces cas-là la possibilité existe pour n, mais pas pour n + 1 (donc c'est impossible, entre autres, pour 1, 8, 12, 15, 19, 23, 26, 30,34, 37, 41, 45,48, 52, 59)
Pour 60 roses, on a vu que p = 1 et q = 7 ($q \geq 3$), on pourra donc continuer.
Le plus grand nombre pour lequel on ne peut pas satisfaire le patron est 59.

Exercice 3 : les 3 cercles



1ère méthode : Soient D, E et F les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA] du triangle
Le triangle est équilatéral, les droites (CD), (AE) et (BF) sont à la fois bissectrices des 3 angles, et médiatrices des 3 côtés.
Appelons G le point d'intersection de [CD] (bissectrice de l'angle ACB) et de la bissectrice de l'angle CBF.

G est à égale distance des droites (CB), (CA) et (BF) (propriété des bissectrices). C'est le centre d'un cercle tangent aux 2 côtés issus de C du triangle.
Les angles BAE et ABF mesurent 30°. L'angle GBA mesure 15°.
Par ailleurs, le point G étant sur la médiatrice de [AB], le triangle (AGB) est isocèle, et donc les angles GAB et GBA sont égaux. Il s'ensuit que les angles GAE et GAF sont égaux (15°), puis que (AG) est la bissectrice de CAE.
Le cercle défini précédemment est donc aussi tangent aux droites (BF) et (AE).
Il suffit de reprendre ensuite cette démonstration 2 fois pour trouver les deux autres cercles.

2ème méthode : Soit ABC le triangle équilatéral, D, E et F les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].
Le cercle de diamètre [AB] coupe le segment [CD] en G.
Le triangle est équilatéral, les droites (CD), (AE) et (BF) sont à la fois bissectrices des 3 angles, et médiatrices des 3 côtés. Les triangles AFB et AEB sont rectangles, donc le cercle passe par E et F.
G est sur la bissectrice de l'angle ACB, donc G est le centre d'un cercle tangent aux côtés [AC] et [BC].
Le triangle AGB est rectangle en G donc l'angle AGB mesure 90°. Par suite, en utilisant les mesures des angles on prouve, comme dans la méthode 1 que G est aussi sur la bissectrice de l'angle EAC, donc que le cercle précédent est aussi tangent à la droite (AE). Par le même raisonnement, il est tangent à la droite (BF).
Soit I et H les symétriques respectifs de G par rapport aux droites (AE) et (BF).
Les trois cercles cherchés ont pour centres G, I et H et pour rayon la moitié de GI, autrement dit la distance entre G et la droite (AE).

3ème méthode : On construit le cercle inscrit dans le triangle ABE. On montre, par le même type de raisonnement que dans les méthodes précédentes, que ce cercle convient. Puis on trace les symétriques de ce cercle par rapport aux droites (AE) et (CD).

Exercices 4 : le lièvre et la tortue

Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 demi-circuits, plus une demi-boucle : il dépasse la tortue à chaque boucle de rang pair, soit 181 fois, il parcourt encore un dernier demi-circuit, et les deux animaux se rencontrent au carrefour (les positions des deux protagonistes sont alors symétriques des positions de départ).

Lorsque la tortue effectue la deuxième moitié du circuit, le lièvre effectue à nouveau 363 demi-circuits, soit un demi-circuit, plus 181 fois le circuit complet.
Il a à nouveau dépassé la tortue 181 fois et se retrouve dans la position de départ, c'est à dire en position de croiser la tortue.

Chaque demi-circuit de la tortue comporte donc 181 dépassements et un croisement, soit 182 « dépassements ou croisements » au carrefour. On a donc des cycles de 182 « dépassements ou croisements », chaque cycle comportant en fait un seul croisement.

$$2005 = 11 \times 182 + 3$$

donc pour 2005 « croisements ou dépassements », il se produit 11 cycles complets, soit 11 croisements.