EXERCICE 3

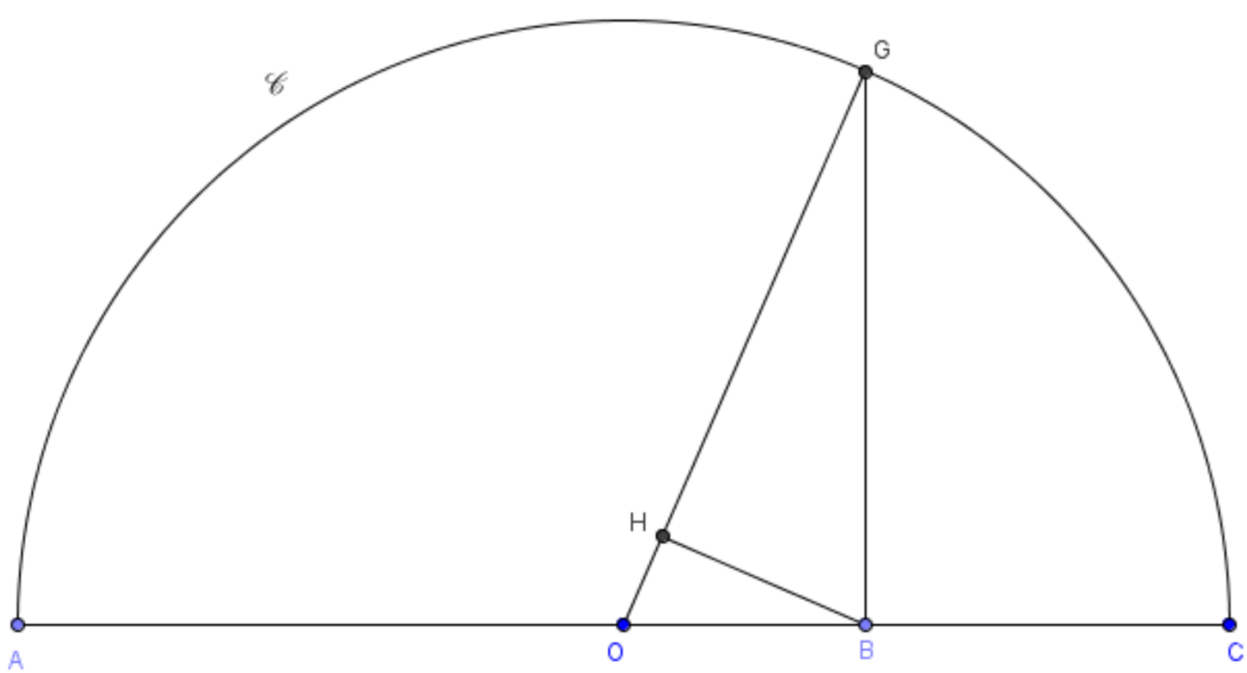
a et b sont deux réels strictement positifs.
On appelle :
moyenne arithmétique des nombres a et b , le nombre m défini par $m = \frac{a+b}{2}$;
moyenne géométrique des nombres a et b , le nombre g défini par $g = \sqrt{ab}$;
moyenne harmonique des nombres a et b , le nombre h défini par $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
Ces notations seront conservées dans toute la suite de l'exercice.

1) a) Calculer chacune de ces trois moyennes lorsque $a = 50$ et $b = 18$.
b) On sait que $h = 16$ et $g = 20$. Calculer m, a et b *avec* a ⑥ b.

2) a) Montrer que $h = \frac{g^2}{m}$.
b) Soit k un réel strictement positif, déterminer les moyennes m', g' et h' de ka et kb en fonction de m, g et h.

3) Dans cette question $a = 10$ et b est un entier naturel strictement supérieur à 10.
a) Montrer que $g^2 = \frac{100h}{(20-h)}$.
b) Trouver toutes les valeurs de b pour lesquelles m, g et h sont des entiers positifs.

4) Sur la figure ci-après, le demi-cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O.
A, B, C sont alignés avec O et sont tels que $AB = a$ et $BC = b$.
La perpendiculaire à (AC) en B coupe le demi-cercle $\mathscr{C}$ en G, et, la perpendiculaire à (OG) passant par B coupe (OG) en H.



a) Montrer que $BG = g$ et $GH = h$.
b) En déduire le classement des trois moyennes dans l'ordre croissant.

EXERCICE 4

Partie A : nombres triangulaires

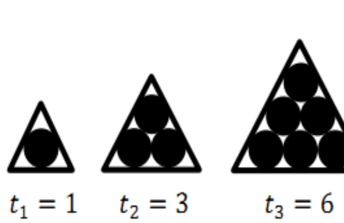


Fig.1

En empilant des jetons comme le montre la figure 1, on définit des nombres triangulaires, correspondant au nombre de jetons utilisés.

Le premier, à un niveau ou d'indice 1, est $t_1 = 1$.

Le second, d'indice 2, est $t_2 = 3$, etc.

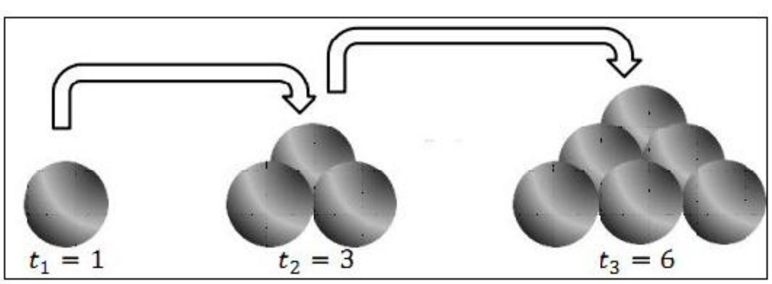
1. Déterminer t_5, t_6, t_7.
2. D'une manière générale, le nombre triangulaire d'indice n est défini pour tout entier naturel n non nul par : $t_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

   On rappelle que $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Que remarque-t-on en additionnant deux termes consécutifs t_n et t_{n+1} de la suite (t_n) ? Démontrer ce résultat.

Partie B : nombres tétraédriques

Considérons, non plus des jetons, mais des boules identiques disposées de la même façon quedans la figure 1 (partie A), posées sur un plan horizontal, au contact les unes des autres comme le montre la figure 2. On retrouve ainsi une succession de nombres triangulaires.



puis $t_4, t_5, ...t_n, ...$

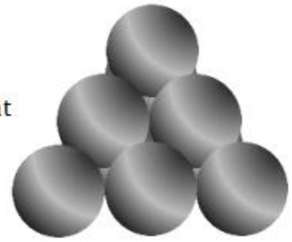
Fig 2

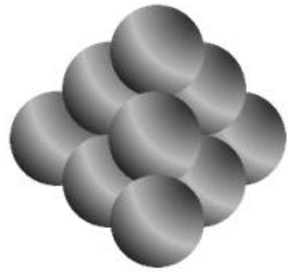
On procède ensuite à des empilements de boules de la façon suivante :

on dispose trois boules en triangle comme pour t_2 ci-dessus puis on pose une boule sur ce groupe de trois. On obtient ainsi un empilement à deux niveaux formé de 4 boules.
Pour obtenir un niveau supplémentaire, on pose ces quatre boules sur le groupe de six formant t_3 (voir figure 3 ci-dessous) et ainsi de suite.

Fig.3

Vue avant





Vue arrière

Par ce procédé, on définit des nombres tétraédriques notés T_n donnant le nombre total de boules nécessaires pour obtenir n niveaux.
Ainsi : $T_2 = t_1 + t_2 = 4$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3 = 10$. On pose par convention T_1=1.
D'une manière générale, le nombre tétraédrique d'indice n est défini par $T_n = t_1 + t_2 + ... + t_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

1. Calculer T_4 et T_5.

2. Soit N le plus petit entier tel que le nombre tétraédrique T_N soit supérieur ou égal à 2012.
a) Déterminer les valeurs de N et de T_N.
Expliquer la démarche. L'écriture d'un algorithme dans cette question sera valorisée.
b) Le diamètre de chaque boule étant de 1 dm, calculer la hauteur en mètres, arrondie au centième, de la pile formée par les T_N boules.