EXERCICE 3

a et b sont deux réels strictement positifs.

On appelle : - moyenne arithmétique des nombres a et b, le nombre m défini par $m = \frac{a+b}{2}$;

- moyenne géométrique des nombres a et b , le nombre g défini par $g = \sqrt{ab}$;

- moyenne harmonique des nombres a et b, le nombre h défini par $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ces notations seront conservées dans tout l'exercice.

1) Calculer chacune de ces trois moyennes lorsque $a = 50$, $b = 18$.

2) Sur la figure 1, le demi-cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O,
A, B, C sont alignés avec O et sont tels que $AB = a$ et $BC = b$.

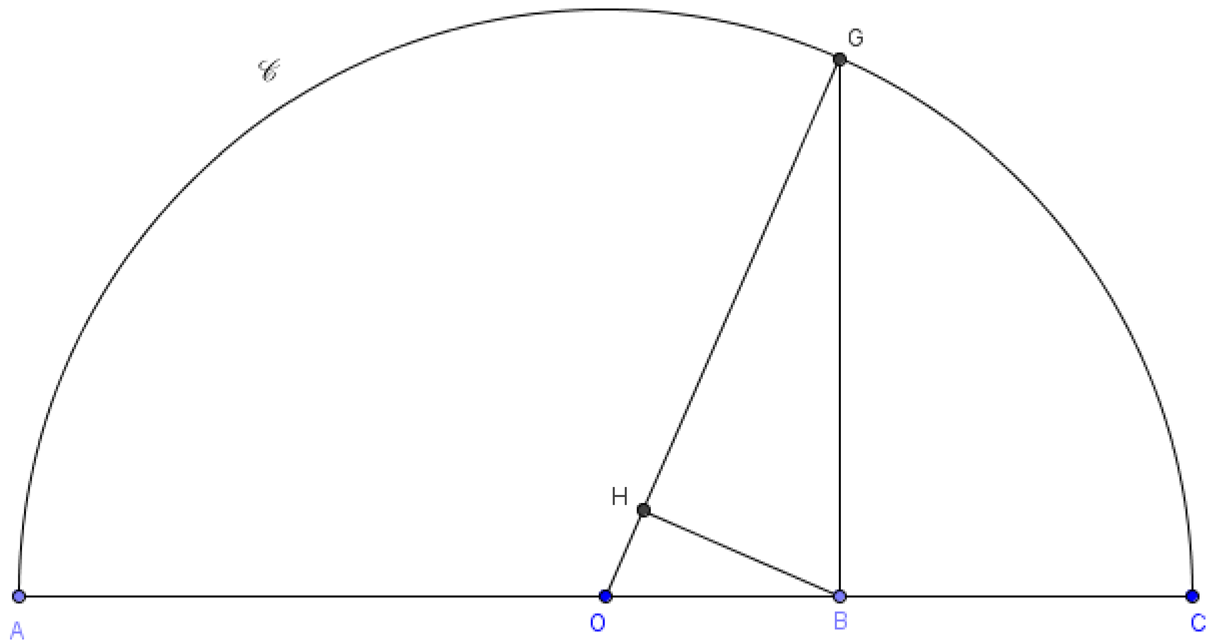

Figure 1

La perpendiculaire à (AC) en B coupe le demi-cercle $\mathscr{C}$ en G, et la perpendiculaire à (OG) passant par B coupe (OG) en H.

a) Montrer $BG = g$ et $GH = h$.

b) En déduire le classement des trois moyennes m, g et h dans l'ordre croissant.

3) Construire à la règle et au compas un carré de même aire que le rectangle donné en annexe (figure 2 à rendre avec la copie) en expliquant votre construction.

4) Sur la figure 3 ci-dessous, on a complété la figure 1 par le rectangle $OBGD$ et le demi-cercle de diamètre $[AE]$ passant par D. .

Montrer que $OE = h$.

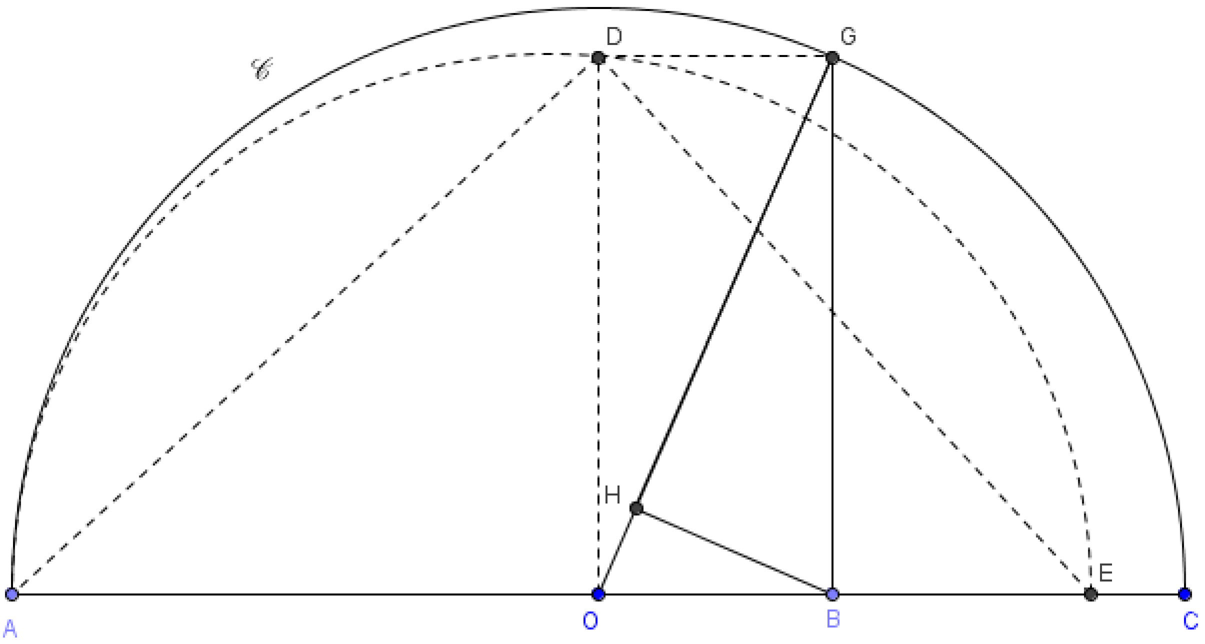

Figure 3

Annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie

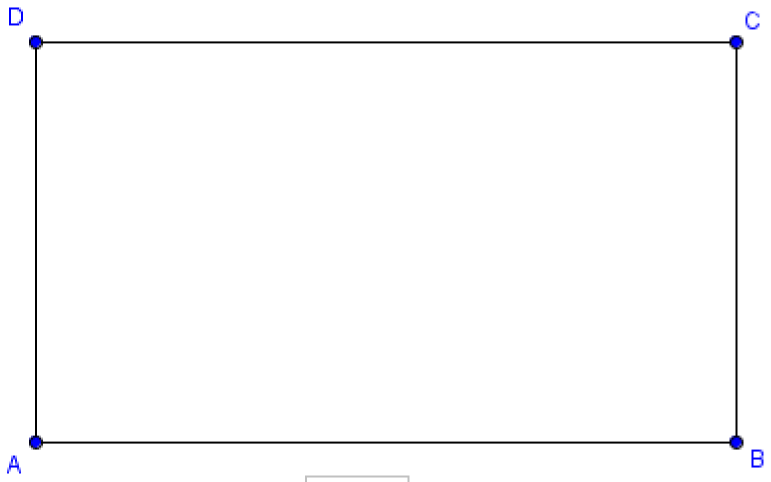

Figure 2

EXERCICE 4

Nous sommes le 21-03-2012.
Le but de l'exercice est de trouver un entier naturel M dont la racine carrée ait pour premières décimales exactement dans l'ordre les chiffres 21032012.
Cet entier M sera déterminé à la dernière question.

Pour tout entier naturel m, on note $D(m)$ le nombre d'entiers strictement compris entre m^2 et $(m + 1)^2$.

1. Montrer que $D(3) = 6$ puis calculer $D(m)$ pour tout entier naturel m.

1. Une première décimale.

Pour tout entier naturel n, on note $L_1(n)$ la liste formée dans l'ordre par la première décimale de chacun des dix nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, ..., \sqrt{n+9}$. On reproduit ici les quatre premières décimales affichées par une calculatrice pour les nombres suivants:

$\sqrt{3} \approx 1{,}\mathbf{7}32\,0$ $\quad \sqrt{4} = 2{,}\mathbf{0}$ $\quad \sqrt{5} \approx 2{,}\mathbf{2}36\,0$ $\quad \sqrt{6} \approx 2{,}\mathbf{4}49\,4$

$\sqrt{7} \approx 2{,}\ \mathbf{6}45\,7$ $\quad \sqrt{8} \approx 2{,}\mathbf{8}28\,4$ $\quad \sqrt{9} = 3{,}\mathbf{0}$ $\quad \sqrt{10} \approx 3{,}\mathbf{1}62\,2$

$\sqrt{11} \approx 3{,}\mathbf{3}16\,6$ $\quad \sqrt{12} \approx 3{,}\mathbf{4}64\,0$ ... $\quad \sqrt{101} \approx 10{,}\mathbf{0}49\,8$ $\quad \sqrt{102} \approx 10{,}\mathbf{0}99\,5$

on a $L_1(3) = (7 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4)$.

a) Donner $L_1(7)$.
b) Soit m_1 l'entier tel que $D(m_1) = 10$.
On pose $n = m_1^2 + 1$.
Vérifier que $L_1(n) = (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9)$.

2. Avec deux décimales.

Pour tout entier naturel n, on note $L_2(n)$ la liste ordonnée des entiers que forment les deux premières décimales de chacun des cent nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, ..., \sqrt{n+99}$.
Ainsi on a $L_2(3) = (73; 00; 23; 44; 64; \dots; 04; 09)$.
On cherche un entier naturel n tel que $L_2(n) = (00; 01; 02; 03; 04; 05; \dots; 98; 99)$.

a) Montrer qu'un tel entier n s'il existe ne peut pas appartenir à l'un des intervalles :
$[1 ; 2^2]$; $[2^2 ; 3^2]$; $[3^2 ; 4^2]$; ... ; $[49^2 ; 50^2]$.

b) Montrer que si $0 \leq N < 10^2$ alors $\left(\dfrac{10^2}{2}+\dfrac{N}{10^2}\right)^2 < \left(\dfrac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\dfrac{10^2}{2}+\dfrac{N+1}{10^2}\right)^2$.

c) Soit m_2 l'entier tel que $D(m_2) = 100$.
Calculer $n = m_2^2 + 1$ et montrer que $L_2(n) = (00; 01; 02; 03; 04; 05; \dots; 98; 99)$.

3. Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M}$ soit 2012, celui formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M+1}$ soit 2013 et celui formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M+2}$ soit 2014.

4. Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par les huit premières décimales de $\sqrt{M}$ soit 21032012.