Problèmes ouverts sur la divisibilité

Stratégie :

On donne une banque de problèmes ouverts aux élèves.
Par groupe, les élèves choisissent un sujet et développent des stratégies de recherche pour le résoudre.
Travail de rédaction du raisonnement et exposé oral.
Si un groupe a répondu à un sujet, il en prend un second.

≈ 1h

Exposés oraux.
Recherche de failles, contre-exemples aux raisonnements par les élèves auditeurs.

≈ 30min

Synthèse enseignant : constat que la notion de divisibilité est un outil commun à tous ces problèmes.

≈ 30min

Banque de problèmes :

Problème 1 : On dispose de 100 lampes numérotées de 1 à 100, dotées d'interrupteurs. Au début, elles sont toutes éteintes.
¤ A la $1^{ère}$ étape, on agit sur tous les interrupteurs allumant ainsi toutes les lampes.
¤ A la $2^{ème}$ étape, on n'agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 2, éteignant ainsi une partie des lampes.
¤ A la $3^{ème}$ étape, on n'agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 3, etc …
Après la $100^{ème}$ étape, quelles seront les lampes allumées ?

Problème 2: Existe-t-il des points à coordonnées entières sur la courbe C : $y = 2\sqrt{x^2+5}$, et si oui, lesquels ?

Problème 3 : Fabriquer des nombres du type $\overline{abcabc}$, où a, b et c désignent des chiffres.
Ces nombres ont-ils des diviseurs communs à 2 chiffres ? Lesquels ? Est-ce le cas pour tous les nombres de ce type ?

Éléments de correction :

1/ Le nombre de fois où on appuie sur l'interrupteur numéro n correspond au **nombre de diviseurs de l'entier n**.
Par exemple, l'interrupteur de la lampe 51 est actionné quatre fois car 51 admet quatre diviseurs (1; 3 ; 17 ; 51).
Comme les lampes sont toutes éteintes au départ, il faut donc que l'interrupteur d'une lampe finalement allumée soit actionnée un nombre impair de fois donc le problème revient à déterminer les entiers de 1 à 100 n'admettant qu'un **nombre impair de diviseurs**.
Cependant on peut constater que les couples de diviseurs fonctionnent par paires (par exemple 1 et 51 puis 3 et 17 pour l'entier 51) donc pour avoir un nombre impair de diviseurs, il faut avoir une « paire » de diviseurs qui est constituée d'un même entier répété deux fois. Les nombres cherchés sont donc les **carrés parfaits** compris entre 1 et 100, ce qui correspond aux lampes 1 ($=1^2$) ; 4 ($= 2^2$) puis 9 ; 16 ;2 5 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 et 100.

Prolongement possible : Caractériser les entiers à deux diviseurs.
Nombre de diviseurs pour un entier fixé (72 ; 96).
Trouver un entier entre 1 et 100 admettant 7 diviseurs puis un autre avec 8 diviseurs.

2/ On vérifie rapidement que le point A(2 ; 6) convient puis avec un tableur ou la calculatrice, on n'en trouve pas d'autres.
Mais on ne peut pas affirmer que c'est le seul point qui convienne !
Deux stratégies souvent utilisées :

- Il faut que $x^2 + 5$ soit un carré parfait pour que l'ordonnée soit un nombre entier.
  Donc $x^2 + 5 = k^2$ où k est un entier naturel et alors $k^2 – x^2 = 5$.
  Le problème revient donc à chercher deux entiers dont les **carrés diffèrent de 5**.
  Si ces nombres diffèrent de 1, alors $(n + 1)^2 – n^2 = n^2 + 2n + 1 – n^2 = 2n + 1$ et donc la seule possibilité est $n = 2$ et on trouve la valeur du début.
  Si ces nombres diffèrent de 2, alors $(n + 2)^2 – n^2 = n^2 + 4n + 4 – n^2 = 4n + 4$ qui ne peut être égal à 5.
  Si l'écart entre ces nombres est supérieur ou égal à 3, alors l'écart entre les carrés est strictement supérieur à 5.
  Par disjonction de cas, le seul point à coordonnées entières (naturelles) sur la courbe est le point A(2 ; 6).

- On élève au carré l'équation $y=2\sqrt{x^2+5}$ qui admettra les mêmes solutions (comme on veut des nombres positifs).
  On obtient l'équation $y^2 = 4 (x^2 + 5)$ soit $y^2 = 4 x^2 + 20$ et donc $y^2 – 4 x^2 = 20$.
  On va ramener le problème à la recherche **des diviseurs de 20** après avoir factorisé $y^2 – 4 x^2$ en $(y + 2x) (y – 2x)$.
  En effet, $(y + 2x)$ et $(y – 2x)$ sont des diviseurs de 20, le premier étant supérieur au second (car x est positif).
  Les diviseurs positifs de 20 sont 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 et 20.
  On obtient les **trois systèmes suivants à résoudre** :
  $\begin{cases} y + 2x = 20 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$ OU $\begin{cases} y + 2x = 10 \\ y - 2x = 2 \end{cases}$ OU $\begin{cases} y + 2x = 5 \\ y - 2x = 4 \end{cases}$
  Après résolution, le premier et le troisième système amène à des **solutions non entières** $(y = 10,5$ puis $y = 4,5)$ donc la seule possibilité vient du couple solution du deuxième système qui nous permet de retrouver (2 ; 6).

3/ A partir de plusieurs exemples, on peut conjecturer que les diviseurs communs de deux chiffres des nombres ainsi composés sont 13 ; 17 ; 77 et 91.
Pour le démontrer, on a besoin de l'**écriture décimale** (càd en base 10) du nombre étudié.
Considérons les chiffres a, b et c càd des entiers compris entre 0 et 9 inclus.
Alors tout nombre de cette forme peut s'écrire avec l'égalité : $\overline{abcabc}=a\times 10^5+b\times 10^4+c\times 10^3+a\times 10^2+b\times 10^1+c$
Puis en factorisant par a, b et c, on trouve $\overline{abcabc}=a\times(10^5+10^2)+b\times(10^4+10)+c\times(10^3+1)$
Et alors $\overline{abcabc}=a\times 100100+b\times 10010+c\times 1001=1001(100a+10b+c)$ avec $100a + 10b + c$ un entier naturel.
Donc tout nombre de cette forme est un **multiple de 1001.**
Et comme $1001=7\times11\times13$, on en déduit que les nombres de cette forme seront toujours divisibles par **les diviseurs à deux chiffres de 1001**, à savoir 11 puis 13 puis $7\times11=77$ et enfin $7\times13=91$.