Suites de nombres et suites de matrices

Cette activité permet de mener l'étude des suites numériques arithmético-géométriques et de comprendre à quelle(s) condition(s) elle est transposable aux suites matricielles.
Une réflexion est alors menée autour du concept d'inverse (chez les réels, tous les nombres non nuls sont inversibles et l'inverse s'écrit facilement, tandis que chez les matrices, il n'y a pas de systématisme, ni d'expression simple de l'inverse).
Un débat peut ensuite être mené sur la convergence d'une suite : pour une suite numérique, il faut et il suffit que la valeur absolue de la raison géométrique soit strictement inférieure à 1 ; peut-on définir une fonction qui jouerait le rôle de valeur absolue pour les matrices ? Cette condition « inférieure à 1 » est-elle transposable aux matrices ?…
Un travail peut par ailleurs être mené sur le sens de la condition nécessaire et suffisante (question **6.**).

I/ Une suite de réels

Soient a et b deux réels.
On souhaite étudier la convergence de $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la fonction associée à la suite (u_n).

1. Étude de cas particuliers : $a = 0$ et $a = 1$

a. Si $a = 0$, caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire sa limite.

b. Si $a = 1$, caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire sa limite selon les valeurs de b.

2. Candidature au « poste » de limite dans le cas où $a \neq 0$ et $a \neq 1$

Résoudre l'équation $f(x) = x$. On note L cette valeur.

3. Détermination de l'expression explicite

a. Montrer que la suite $(u_n - \mathrm{L})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont la raison vaut a et le terme initial vaut $u_0 - \frac{b}{1-a}$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

II/ Une suite de matrices : la méthode serait-elle la même ? A quelle(s) condition(s) ?

Soient A une matrice carrée de taille 2×2, et B une matrice colonne de taille 2×1.
On souhaite étudier la convergence de $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$. Soit $f : X \longmapsto AX + B$ l'application associée à cette suite de matrices.

4. Si A est la matrice nulle de taille 2×2, que devient la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5. Si A est la matrice identité de taille 2×2, que devient la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

6. A quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la matrice A l'équation matricielle $X = AX + B$ d'inconnue X admet-elle une solution ?
On note L la solution de cette équation, lorsque les conditions sont réunies pour lui permettre d'exister.

7. On suppose que A n'est ni la matrice nulle, ni la matrice identité de taille 2×2.
On suppose de plus que le(s) condition(s) de la question **6.** sont satisfaites.
Montrer qu'alors, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n(\mathrm{U}_0 - \mathrm{L}) + \mathrm{L}$.

Éléments de correction :

I-1/a/ si $a = 0$, la suite (u_n) est constante à partir de $n = 1$ et elle converge vers b.

I-1/b/ si $a = 1$, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b. Pour tout n, $u_n = u_0 + nb$

Donc si $b > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,

si $b < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$,

si $b = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

I-2/ On résout l'équation $f(x) = x$ càd $ax + b = x$ d'où $b = x - ax$ et en factorisant $b = x\,(1 - a)$

Et comme $a \neq 1$, on peut diviser par $(1 - a)$ et donc $x = \frac{b}{1-a}$.

On note alors $L = \frac{b}{1-a}$.

I-3/a/ Pour tout entier n, $u_{n+1} - L = a\,u_n + b - (aL + b)$ car L est une solution de l'équation $ax + b = x$

$$= a\,(u_n - L) + b - b$$
$$= a\,(u_n - L)$$

Donc $(u_n - L)$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - L = u_0 - \frac{b}{1-a}$.

I-3/b/ On en déduit que pour tout entier n, $u_n - L = a^n\,(u_0 - \frac{b}{1-a})$ et donc $u_n = L + a^n\,(u_0 - \frac{b}{1-a})$.

II- 4/ Si $A = O_2$, alors la suite (U_n) est constante à partir de $n = 1$ et elle vaut B.

II- 5/ Si $A = I_2$, alors pour tout entier n, $U_{n+1} = I_2 \times U_n + B$ et on peut montrer alors par récurrence que pour tout entier n, $U_n = U_0 + n\,B$.

II- 6/ **Supposons que la matrice $(I_2 - A)$ soit inversible,** et on note $C = (I_2 - A)^{-1}$

On peut alors résoudre l'équation car $X = AX + B$ devient $X - AX = B$ puis en factorisant par X, on obtient $(I_2 - A)\,X = B$.

Ensuite, on multiplie chacun des termes à gauche par C et l'équation devient

$C\,(I_2 - A)\,X =$

Et comme C est la matrice inverse de $(I_2 - A)$ alors $C\,(I_2 - A) = I_2$

Et alors, on trouve la solution $X = C \times B = (I_2 - A)^{-1} \times B$.

II- 7/ On note $P(n)$: « $U_n = A^n(U_0 - L) + L$ » et on le montre par récurrence pour tout entier n.

Initialisation : $A^0(U_0 - L) + L = I_2\,(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 0$ et on montre alors que $P(k + 1)$ est vraie.

On sait que $U_{k+1} = A\,U_k + B$

$= A\,(A^k(U_0 - L) + L) + B$ par hypothèse de récurrence

$= A^{k+1}(U_0 - L) + A\,L + B$

$= A^{k+1}(U_0 - L) + L$ car $AL + B = L$ par définition

donc $P(k + 1)$ est vraie

Conclusion : On a démontré par récurrence que pour tout entier n, $U_n = A^n(U_0 - L) + L$